A comunicação matemática escrita na resolução de tarefas e o seu efeito na concretização do teste intermédio: Um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade do curso de ciências e tecnologias

Ana Correia Videira

Uminho | 2013

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Correia Videira

A comunicação matemática escrita na resolução de tarefas e o seu efeito na concretização do teste intermédio: Um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade do curso de ciências e tecnologias

Outubro de 2013

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Correia Videira

A comunicação matemática escrita na resolução de tarefas e o seu efeito na concretização do teste intermédio: Um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade do curso de ciências e tecnologias

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob orientação da
Doutora Maria Helena Matinho

Outubro de 2013

DECLARAÇÃO

Nome: Ana Correia Videira

Endereço Eletrónico: ana43487@hotmail.com

Telefone: 91 511 51 25

Número do Bilhete de Identidade: 13006223

Título do Relatório:

A comunicação matemática escrita na resolução de tarefas e o seu efeito na concretização do teste intermédio: Um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade do curso de ciências e tecnologias

Supervisora:

Doutora Maria Helena Matinho

Ano de conclusão: 2013

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

Universidade do Minho, 31 de Outubro de 2013

AGRADECIMENTOS

À minha supervisora, Doutora Maria Helena Martinho, pela sua disponibilidade em acompanhar sempre o meu trabalho, pelas suas sugestões e opiniões e pelas suas palavras reconfortantes em momentos menos bons.

À minha orientadora, Professora Sandra Martins, pela sua total disponibilidade em todos os assuntos relativos a este estudo, pelas oportunidades dadas em sala de aula, pelas suas sugestões, pelo seu carinho, compreensão e dedicação.

À escola que me recebeu de braços abertos para realizar este estágio.

Aos alunos da turma que participaram neste estudo, que sempre se mostraram empenhados nas atividades que lhes propunha.

Aos colegas da minha turma de mestrado, em geral, pela partilha de informações.

Aos meus pais, à minha irmã e ao meu marido pela compreensão e apoio incondicional.

A todos o meu muito obrigada!

A COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA ESCRITA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS E O SEU EFEITO NA CONCRETIZAÇÃO DO TESTE INTERMÉDIO: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 11.º ANO DE ESCOLARIDADE DO CURSO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS

Ana Correia Videira
Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Universidade do Minho, 2013

RESUMO

O presente estudo centra-se na comunicação matemática escrita na resolução de tarefas, sendo que estas tarefas são problemas e tarefas de investigação. O principal propósito deste estudo é aperfeiçoar o ensino e aprendizagem da matemática, dos alunos de uma turma do 11.º ano de escolaridade, do curso de ciências e tecnologias. Neste sentido, durante a intervenção pedagógica realizada teve-se sempre presente os seguintes objetivos: i) analisar a linguagem matemática dos alunos nos seus procedimentos escritos; ii) analisar as justificações dos alunos nos seus procedimentos escritos; iii) verificar a interpretação dos alunos na leitura de um texto ou procedimento escrito.

Para a análise dos dados foram recolhidas as produções escritas dos alunos, nomeadamente, elementos das fichas de avaliação e tarefas. É de salientar que se optou por diferentes formas de trabalho, tendo os alunos realizado atividades individualmente, em díades e em grupo. A par destas recolhas foram também analisados alguns registos da professora, sobre as interações dos alunos aquando da realização de tarefas em díades e em grupo.

Para analisar as produções escritas dos alunos, recorreu-se ao estudo da linguagem matemática utilizada pelos alunos, nomeadamente quais os tipos de representações mais utilizadas (representação ativa, icónica e simbólica), de que forma justificam os alunos os seus raciocínios e como interpretam um determinado enunciado e a própria resolução da tarefa.

Em termos de resultados, verificou-se que quanto à linguagem matemática os alunos optam mais frequentemente pelo uso das representações icónicas e simbólicas, quanto à justificação dos procedimentos averiguou-se que os alunos apenas o faziam quando lhes era expressamente solicitado, caso contrário não apresentavam qualquer esquema/sequência do que raciocinaram. Por último, detetou-se que os alunos apresentaram dificuldades na interpretação de textos escritos, assim como, na interpretação da própria resolução.

É de realçar que o trabalho de grupo foi uma mais-valia para os alunos, já que no final da intervenção pedagógica foi referido pelos próprios alunos que a realização de tarefas em grupo contribuiu para uma aprendizagem mais significativa da matemática.

WRITTEN MATHEMATICAL COMMUNICATION IN SOLVING TASKS AND ITS EFFECT IN THE INTERMEDIATE TEST: A STUDY WITH 11th YEAR STUFENTS IN THE SCIENCE AND TECHNOLOGY SPECIALIZATION COURSE

Ana Correia Videira

Masters in Mathematics Teaching to the 3rd Cycle of Basic School and Secondary School

Minho University, 2013

ABSTRACT

This study focuses on written mathematical communication in solving tasks, being that these tasks are mathematical problems and research tasks. The main goal of this study is to perfect the teaching and learning processes of students in an 11th year class from the science and technology specialization course regarding mathematics. In this respect, during the pedagogical intervention the following goals were always present: i) analyze the mathematical language of students in their written procedures; ii) analyze the justifications of students in their written procedures; iii) check students' interpretation of a reading text or written procedure.

For the analysis of data, the written productions of the students were collected, namely, elements of their assessment tests and tasks. It should be noted that different types of work were chosen, the students having carried out the activities individually, in pairs or in groups. As well as this collected data some of the teacher's records on the students' interactions when carrying out the tasks in pairs or in groups were analyzed.

To analyze the written productions of the students, the study of the mathematical language used by the students was resorted to, namely the types of representations used most (active, iconic or symbolic representations), how the students justify their reasoning and how they interpret a certain text or written procedure.

In terms of results, it was found that in terms of mathematical language the students frequently opt for the use of iconic and symbolic representations. In terms of justifying procedures, it was found that students only did so when explicitly asked, otherwise they did not present any diagram/sequence showing their reasoning. Finally, it was found that the students showed difficulties in the interpretation of written texts, as well as in the interpretation of the very solution.

It is to be noted that group work was an asset for the students, as at the end of the pedagogical intervention the students mentioned that carrying out group tasks contributed to a more significant learning of mathematics.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I
INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados o tema e a finalidade do estudo, a sua pertinência e a estrutura do relatório.

1.1. Tema e finalidades

A comunicação matemática (oral e escrita) tem-se evidenciado cada vez mais na aula de matemática. A orientação do professor deve ser, sempre, no sentido de desenvolver junto dos alunos os seus raciocínios, conjeturas e justificações (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1994; Ministério da Educação [ME], 2002; Menezes, 1996).

Em matemática, escrever é uma vertente do discurso, fundamental, no ensino e aprendizagem da matemática. Através da linguagem escrita, os alunos devem ser capazes de apresentar a matemática, nomeadamente a linguagem simbólica e icónica (NCTM, 1994; Rosaen, 1989; Ponte et al., 2007).

Tendo em conta o tema principal deste estudo, a intervenção pedagógica desenvolveu-se numa turma do 11.º ano do curso de ciências e tecnologias, onde a comunicação matemática foi uma constante. A implementação de tarefas junto destes alunos foi sempre com o objetivo de explorar/melhorar a comunicação matemática escrita, ao nível da linguagem, da justificação e da interpretação em matemática.

Posto isto, pretende-se neste estudo, concretizar os seguintes objetivos:

i) Analisar a linguagem matemática dos alunos nos seus procedimentos escritos;
ii) Analisar as justificações dos alunos nos seus procedimentos escritos;
iii) Verificar a interpretação dos alunos na leitura de um texto ou procedimento escrito.

1.2. Pertinência

Em matemática são diversas as áreas de estudo, por exemplo, a geometria, as funções, a estatística e as probabilidades. A comunicação matemática é um tema transversal que revigora em qualquer uma destas áreas de estudo (NCTM, 1994; ME, 2002). No ensino e na aprendizagem da matemática, com certeza, surgiriam limitações se não fosse possível comunicar oralmente e por escrito.

Desenvolver o raciocínio matemático, incentivar os alunos ao diálogo e à participação nas aulas de matemática, questionar os alunos no sentido de refletirem sobre determinada problemática, são algumas das tarefas, difíceis, que os professores têm em mãos (NCTM, 1994; ME, 2002).

Nos últimos anos tem-se dado mais relevância às aulas de matemática onde o aluno assume um papel mais ativo, isto é, participa e envolve-se nas atividades matemáticas, ultrapassando a ideia do ensino expositivo por parte do professor (NCTM, 1994).

A comunicação matemática é essencial numa aula de matemática, já que, sem ela dificilmente ocorre ensino e aprendizagem. Tal como refere Martinho e Ponte (2005a) "a comunicação constitui um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente" (p. 2). Em matemática é necessário conjeturar, validar ou refutar essas conjeturas, desenvolver argumentos matemáticos, estabelecer conexões, validar soluções (NCTM, 1994). Todos estes procedimentos são essenciais ao longo de um processo de ensino e aprendizagem em matemática.

Neste estudo em particular optou-se pela análise da comunicação matemática escrita dos alunos, já que, tal como refere Rosaen (1989) é necessário um aluno escrever para aprender determinado conteúdo. No entanto, é importante referir que apesar deste estudo se centrar na comunicação matemática escrita, a comunicação matemática oral é fundamental para desenvolver a escrita.

A linguagem matemática, a justificação de procedimentos e a interpretação de um texto ou procedimento escrito foram as vertentes selecionadas para análise, dos procedimentos escritos dos alunos. Bruner (1999), Menezes (1996, 2000) e Ponte e Velez (2011) são alguns dos autores que realçam a importância de cada uma destas vertentes, como forma de aperfeiçoar e/ou desenvolver a comunicação matemática dos alunos.

1.3. Estrutura do relatório

O presente relatório está organizado em quatro capítulos. O capítulo I – *Introdução* – refere-se à constituição e estrutura do relatório, englobando por isso, o tema e finalidades, os objetivos e a pertinência do estudo.

No capítulo II – *Enquadramento Contextual e Teórico* – efetua-se o enquadramento deste estudo e justifica-se a escolha do mesmo, recorrendo à literatura. O capítulo II encontra-se repartido em dois subcapítulos. O primeiro subcapítulo refere-se ao contexto da intervenção, explicitando a caracterização da escola, dos alunos e da turma. O segundo subcapítulo corresponde ao plano geral da intervenção, nomeadamente às metodologias de ensino e aprendizagem e às estratégias de investigação e avaliação da ação.

No Capítulo III – *Intervenção* – descreve-se e avalia-se o processo de intervenção, apresentando para tal, os elementos de análise e investigação neste estudo. Este capítulo encontra-se repartido em sete subcapítulos, correspondendo cada um deles às tarefas e fichas de avaliação analisadas.

No Capítulo IV – *Conclusões, Implicações, Recomendações e Limitações* – reúnem-se as principais conclusões deste estudo, tendo em conta os objetivos inicialmente apresentados e a fundamentação teórica efetuada. Apresentam-se algumas recomendações para trabalhos futuros, assim como, limitações constatadas na realização deste estudo.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Neste capítulo são apresentados os enquadramentos, contextual e teórico, relativos ao estudo que se desenvolveu. O primeiro subcapítulo refere-se ao *contexto da intervenção*, isto é, refere-se ao contexto escola-turma. O segundo subcapítulo, *o plano geral da intervenção*, retrata a fundamentação teórica enquadrada neste estudo.

2.1. Contexto da intervenção

Para a compreensão do contexto da intervenção, nesta secção apresentam-se a caracterização da escola e a caracterização dos alunos e da turma.

2.1.1. Caracterização da escola

Esta intervenção realizou-se durante o ano letivo 2012/2013, numa escola secundária situada numa vila do concelho de Famalicão, distrito de Braga. A turma do 11.º ano de escolaridade pertencia à área científica-humanística, do curso de ciências e tecnologias.

A vila, um meio rural e de pequena dimensão económica, começou a expandir-se gradualmente tornando-se uma zona industrial, cujo setor têxtil se evidenciou. A confeção e vestuário, a metalo-mecânica ligeira, os componentes para automóveis, as embalagens, os bordados e a indústria das carnes foram alguns dos setores que iniciaram o seu crescimento. Mais ainda, nos últimos anos tem-se verificado um desenvolvimento da construção civil, do comércio e serviços.

Os alunos desta escola pertenciam, maioritariamente, a classes sociais de baixos recursos económicos, já que um dos grandes problemas que afeta a vila é o desemprego e o emprego precário.

A nível da constituição da escola, esta possui dois pavilhões que contêm diversos tipos de salas, com diferentes especificidades, nomeadamente salas para as aulas de tecnologias de informação de comunicação (TIC) e multimédia, para o curso de eletricistas de instalações, para educação visual e desenho, laboratórios de física e química, biologia e matemática, salas de diretores de turma, para os clubes da escola, entre outros. É de salientar que as salas de aulas estão, maioritariamente, equipadas com um computador com acesso à internet e vídeo projetor. Existe também um terceiro pavilhão essencialmente para os alunos das novas oportunidades, um pavilhão gimnodesportivo e espaços verdes envolventes da escola.

A escola acolhe cerca de 1841 alunos, das várias freguesias da vila, que compõem os vários níveis de escolaridade, ensino básico, secundário, educação e formação de adultos (EFA), cursos de educação e formação (CEF) e cursos profissionais. A escola apresenta um total de 248 docentes, maioritariamente, com grande experiência profissional e 49 funcionários distribuídos pelas diversas categorias profissionais. É de salientar que estes dados são relativos ao ano letivo 2010/2011, sendo os registos mais atualizados que a escola possuía.

No que concerne à avaliação externa da escola, esta foi avaliada com *muito bom* às categorias de liderança e organização e gestão escolar, e foi classificada com *bom* às categorias de resultados, prestação do serviço educativo e capacidade de autorregulação e melhoria da escola (IGEC, 2008). A escola tem sempre como objetivo atender aos interesses dos alunos, proporcionando-lhes uma serie de atividades que se encontram discriminadas no plano anual de atividades (PAA). O PAA é um documento elaborado pela escola, para dar a conhecer à comunidade educativa todas as atividades e projetos previstos para o ano letivo. Alguns dos objetivos da implementação do PAA na escola são: i) estimular o trabalho cooperativo entre professores e alunos; ii) desenvolver o espírito crítico nos agentes da comunidade educativa; iii) promover a ligação entre a escola e a comunidade; iv) desenvolver competências ao nível da utilização das TIC; v) desenvolver a comunicação escrita dos alunos (PAA, 2012/2013)[1].

2.1.2. Caracterização dos alunos e da turma

A turma, na qual se desenvolveu o estudo era do 11.º ano de escolaridade, constituída por vinte e quatro alunos, quinze dos quais raparigas e nove rapazes. Destes três, duas raparigas e um rapaz estavam a frequentar pela segunda vez o 11.º ano. Quatro alunos da turma frequentaram as aulas de apoio de matemática desde o início do ano letivo, devido às dificuldades apresentadas e às classificações obtidas à disciplina no ano letivo anterior. Desde o início do segundo período, as aulas de apoio a matemática já contavam com nove alunos inscritos, como consequência das classificações obtidas no período letivo anterior. É de salientar que uma das alunas repetentes anulou a matrícula em meados do terceiro período, reduzindo a turma a vinte e três alunos.

A turma era heterogénea, tinha alunos participativos e empenhados para a matemática, porém outros, estavam desinteressados e revelavam falta de estudo. Esta turma do 11.º ano era constituída, praticamente, pelos mesmos alunos que frequentaram a turma no 10.º ano. A média final da turma à disciplina de matemática no 10.º ano foi de 11,8 valores.

[1] Documento disponibilizado pela escola, em fase de elaboração quando consultado.

Segundo a professora de matemática da turma, a nível disciplinar, durante o ano letivo anterior, a turma não apresentou quaisquer situações conflituosas, tendo as aulas de matemática decorrido, sempre, sem problemas comportamentais por parte dos alunos.

Da recolha diagnóstica efetuada antes da intervenção pedagógica, verificou-se que, quanto à linguagem matemática, os alunos utilizam representações simbólicas, esquecendo-se em algumas situações de aplicar símbolos de equivalência e fórmulas gerais, e com menor afluência usam as representações icónicas. No que diz respeito à interpretação do problema e à sua resolução, e à justificação dos procedimentos utilizados, os alunos apresentam maiores dificuldades. Cerca de 80% dos alunos, não justificam os valores utilizados, apenas os aplicam. As mesmas dificuldades refletem-se na interpretação, em que os alunos não concretizam corretamente o problema, dado o défice na interpretação. É de salientar que nesta última, os alunos por vezes interpretam erradamente, porque leem o enunciado rapidamente e com pouca atenção.

Dos vinte e quatro alunos da turma, apenas um não possui computador em casa com acesso à internet e todos eles possuem uma calculadora gráfica, desde os modelos mais antigos aos modelos mais recentes. Os alunos revelaram saber utilizar a calculadora gráfica e referiram, ao longo das aulas, a preferência pela realização de tarefas com recurso à calculadora gráfica.

Acerca dos pais destes alunos, pode-se dizer que apenas duas mães estavam em situação de desemprego, e os restantes pais, maioritariamente, trabalham por conta de outrem, em indústrias, empregos típicos da zona em questão.

2.2. Plano geral de intervenção

Neste subcapítulo, primeiramente salientam-se os aspetos relevantes que o currículo nacional aponta em termos de comunicação matemática, apresentados no tópico *A comunicação matemática e a sua importância no programa escolar* e de seguida apresenta-se a comunicação matemática segundo as perspetivas de alguns autores no tópico *A comunicação matemática*. Subjacente a esta última, encontram-se as principais ideias de alguns autores relativas à linguagem matemática, à justificação e à interpretação.

Apresentam-se ainda duas secções relativas ao plano geral de intervenção, a primeira refere-se às metodologias de ensino e aprendizagem e a segunda às estratégias de investigação e avaliação da ação.

A comunicação matemática e a sua importância no programa escolar

O programa de matemática do ensino secundário foi homologado em 2002 pelo departamento do ensino secundário do ME e é para os professores a ferramenta base para o seu trabalho. Nele estão patentes as sugestões metodológicas que os professores devem seguir, nomeadamente, os temas obrigatórios a abordar em cada ano de escolaridade, os objetivos e as competências gerais que os alunos devem desenvolver e os temas transversais.

No programa de matemática do ensino secundário, a comunicação matemática surge como um tema transversal no ensino e aprendizagem da matemática.

> A comunicação matemática (oral ou escrita) é um meio importante para que os estudantes clarifiquem o seu pensamento, estabeleçam conexões, reflitam a sua aprendizagem, aumentem o apreço pela necessidade de precisão da linguagem, conheçam conceitos e terminologias, aprendam a ser críticos. Cada estudante deve receber do professor estímulo e oportunidades frequentes para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de matemática (e fora delas) pois assim estarão a organizar, consolidar e ampliar o seu conhecimento matemático. (ME, 2002, p.11)

Refere ainda o mesmo documento que “(...) é absolutamente necessário que as atividades tenham em conta a correção da comunicação oral e escrita” (ME, 2002, p.11). Pode-se assim dizer que, a comunicação matemática, oral e escrita, é um tema transversal de extrema importância no ensino e aprendizagem da matemática, o qual, deve ser cada vez mais abordado e desenvolvido pelos professores. Neste ponto refere o NCTM (1994) que “a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação são processos que devem estar sempre presentes no ensino da Matemática e devem ser trabalhados pelos professores” (p. 97).

Este estudo desenvolveu-se, essencialmente, sob a grande temática *funções*, em particular sobre as funções racionais (fracionárias). Esta temática deve ser abordada progressivamente no secundário, desde as funções fracionárias até às exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas. É fundamental que os alunos ampliem o seu conhecimento sobre as funções e que tenham oportunidade de aprofundar experiências anteriores (ME, 2002; NCTM, 2007).

A comunicação matemática

Para este estudo selecionou-se como tema *A comunicação matemática escrita na resolução de tarefas e o seu efeito na concretização do teste intermédio,* dada a sua relevância no ensino e aprendizagem da matemática. Antes de esmiuçar todo o tema em concreto, é necessário perceber o significado de comunicação. Segundo Menezes (2000) a “(...)

comunicação humana é uma forma de interação social entre indivíduos" (p. 2). Assim, a comunicação é a forma mais natural das pessoas interagirem entre si, sendo igualmente a forma mais natural de o fazerem numa aula de matemática. Menezes (1996) considera "(...) a comunicação na aula de Matemática como abarcando todas as interações verbais (orais e escritas) que alunos e professor podem estabelecer, recorrendo à língua materna e à linguagem própria da Matemática" (p. 4). Mais ainda, refere o NCTM (1994) que a comunicação é "(...) o veículo através do qual professores e alunos podem reconhecer a matemática como um conjunto de processos de resolução de problemas e de raciocínio" (p. 98).

Numa aula de matemática é fundamental a existência de comunicação matemática entre os diferentes intervenientes, isto é, professor-aluno, aluno-professor e aluno-aluno. Para existir uma aprendizagem significativa por parte dos alunos, todos os intervenientes na aula de matemática, devem participar nela. Refere o NCTM (1994) que "a aprendizagem dos alunos em matemática é favorecida num ambiente de aprendizagem construído como uma comunidade de pessoas que colaboram entre si a fim de que as ideias matemáticas tenham sentido" (p. 60). Alguns estudos que relevam a importância da comunicação matemática e consequentes interações numa aula de matemática são Martinho e Ponte (2005a), Martinho e Ponte (2005b), Passos (2008), Nunes e Ponte (2008) e Dias e Santos (2010).

A comunicação matemática pode-se apresentar através da forma oral e escrita. Neste estudo, tal como indica o tema deste relatório, será analisada a comunicação matemática escrita, através das produções escritas dos alunos. No entanto, não se pode deixar de referir que a comunicação oral e escrita estão interligadas, e que ambas são de extrema importância no ensino e aprendizagem da matemática.

Neste contexto, a comunicação matemática oral, como o próprio nome indica, refere-se à oralidade presente na aula de matemática. Neste sentido, o professor tem o papel fulcral de orientar os alunos no seu discurso oral e escrito, de forma que eles compreendam matemática (NCTM, 1994). A pergunta do professor torna-se, assim, primordial para a comunicação matemática na sala de aula. Segundo o NCTM (1994) os professores devem perguntar frequentemente aos alunos "porquê?", e devem pedir para os alunos explicarem determinada situação. O questionamento do professor é essencial na condução do discurso na sala de aula, e principalmente é crucial na condução do discurso do aluno no sentido do raciocínio matemático.

O professor deve evitar perguntas de memorização de conteúdos, deve sim, colocar questões que levem os alunos a raciocinar, conjeturar e explorar, dando-lhes tempo para tal. Nesta situação, refere Sousa, Cebolo, Alves e Mamede (2009),

> A promoção da comunicação matemática depende em muito do papel assumido pelo professor. Neste contexto, cabe ao professor: a) comunicar com rigor e clareza; b) dar tempo suficiente para o aluno raciocinar; c) ouvir as ideias dos outros; d) colocar em discussão essas ideias e validá-las coletivamente; e e) dar a devida relevância às conclusões a tirar. (p. 4)

A escrita, por sua vez, é igualmente fundamental em matemática, segundo Rosaen (1989) "ensinar os alunos a escrever sobre um determinado conteúdo é ensiná-los a 'escrever para aprenderem esse conteúdo'" (p. 155).

O NCTM (1994) refere relativamente à vertente escrita que "escrever é uma outra componente importante do discurso. Os alunos aprendem a usar, num contexto significativo, as ferramentas do discurso matemático – termos especiais, diagramas, gráficos, esquemas, analogias, modelos físicos e símbolos" (p. 36). Constata-se então, que a vertente escrita tem um forte impacto na matemática, já que será realmente improvável que um aluno compreenda matemática, sem utilizar corretamente as simbologias e justificações subjacentes. Ponte et al. (2007) salienta que "(...) a linguagem escrita (incluindo todo o tipo de registos escritos, simbólicos e representações icónicas) é uma forma de comunicação que tem um papel complementar fundamental no ensino-aprendizagem desta disciplina" (p. 45).

É igualmente de mencionar que a escrita está diretamente relacionada com a leitura, um aluno que interprete incorretamente determinado enunciado, irá com certeza raciocinar erradamente, e consequentemente realizar incorretamente determinada tarefa ou até mesmo não a realizar. Refere Menezes (1996) que "a escrita, intimamente ligada à leitura — outra dimensão da comunicação — é extremamente importante na comunicação que tem lugar na sala de aula, principalmente com alunos que têm dificuldade em falar em público" (p. 5). São vários os estudos que refletem a importância da comunicação matemática escrita no ensino e aprendizagem da matemática, nomeadamente Santos (2005), Selas (2008), Menezes (1996) e Ponte et al. (2007).

Em matemática, como se sabe, ler, interpretar, raciocinar, comunicar oralmente são procedimentos essenciais para compreender os conteúdos da disciplina. Escrever em matemática é igualmente um procedimento significativo, não só porque transmite detalhadamente o pensamento do aluno, mas também pelos simbolismos próprios que a disciplina possui (Menezes, 1996). Por tudo o que foi dito, analisar a linguagem matemática dos alunos, analisar como é que eles justificam os seus procedimentos escritos e como é que interpretam um texto ou procedimento escrito, faz todo o sentido, na disciplina de matemática.

Para finalizar é de referir que a escrita é deveras importante, em matemática, devido ao poder simbólico desta ciência escrita (Menezes, 1996).

Algumas das capacidades/aptidões que os alunos devem ser capazes de usar/revelar como forma de desenvolver a sua comunicação matemática são: "exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens", "usar corretamente o vocabulário específico da matemática" e "usar a simbologia da matemática" (ME, 2002, p. 5). Estas capacidades/aptidões estão inteiramente relacionadas com a linguagem matemática, sendo portanto relevante esclarecer quais as dimensões que envolvem as representações matemáticas.

Linguagem matemática

A linguagem matemática pode ser referida como um "(...) conjunto de símbolos próprios, codificados, e que se relacionam segundo determinadas regras, que supostamente são comuns a uma certa comunidade e que as utiliza para comunicar" (Menezes, 2000, pp. 4-5). Mais ainda, refere igualmente Menezes (2000) que "a linguagem da matemática é híbrida, pois resulta do cruzamento da linguagem da matemática com uma linguagem natural, no nosso caso, o português" (p. 5). Assim sendo, a linguagem matemática é composta pela própria simbologia da matemática e pela linguagem corrente. Na utilização da linguagem matemática recorre-se à sua representação, através de esquemas, diagramas, gráficos, tabelas, expressões, entre outros.

Segundo Bruner (1999) a representação do conhecimento enquadra-se em três níveis, ativa, icónica e simbólica. A primeira refere-se à manipulação e à própria ação física, a representação icónica é caracterizada pela capacidade de representação e conexão através de imagens, e por último, a representação por palavras ou linguagem denomina-se por representação simbólica. Na figura 1 encontra-se um esquema que representa as principais ideias de Bruner acerca das representações.

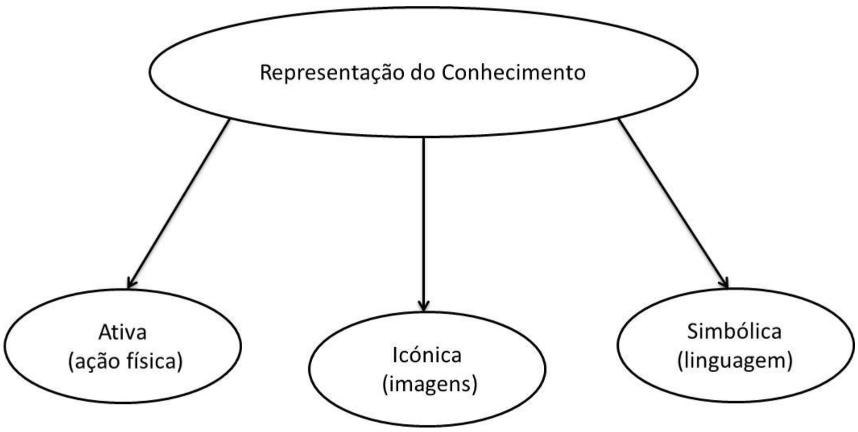


Figura 1. A representação do conhecimento segundo Bruner (1999).

Um estudo diretamente relacionado com as representações matemáticas é o de Ponte e Velez (2011), no qual se retratam as representações como formais e informais. Segundo os autores, as representações formais estabelecem-se entre a representação simbólica e os algoritmos, já as representações informais passam, essencialmente, pela aplicação de tabelas e esquemas. É de salientar, por curiosidade, que neste estudo as professores referiram que apesar de considerarem relevante o uso de representações informais, tendem a valorizar e incentivar os seus alunos no uso de representações formais. Na figura 2 retrata-se um esquema que reflete as ideias mencionadas.

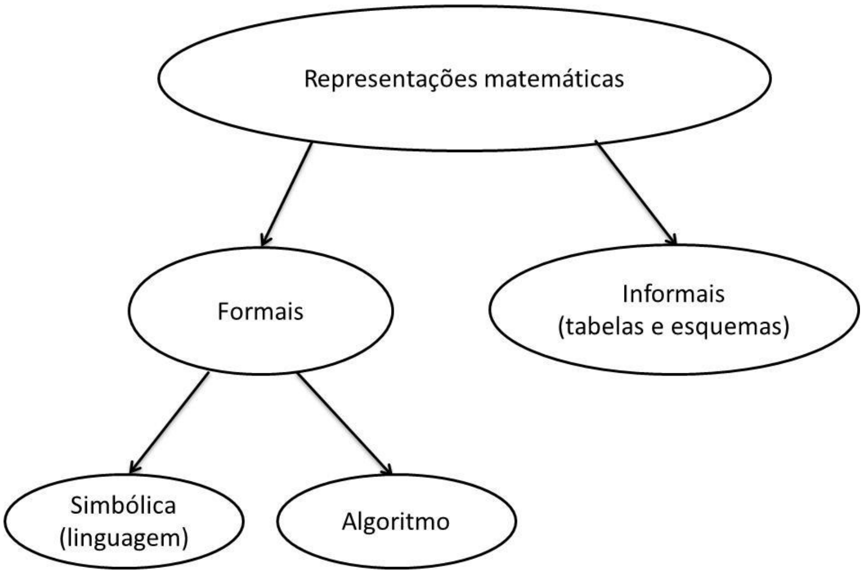


Figura 2. As representações matemáticas segundo Ponte e Velez (2011).

Tendo em conta os modelos apresentados pelos autores Bruner (1999) e Ponte e Velez (2011), optou-se por organizar toda a informação mencionada, que foi a base para a análise da linguagem matemática no presente estudo.

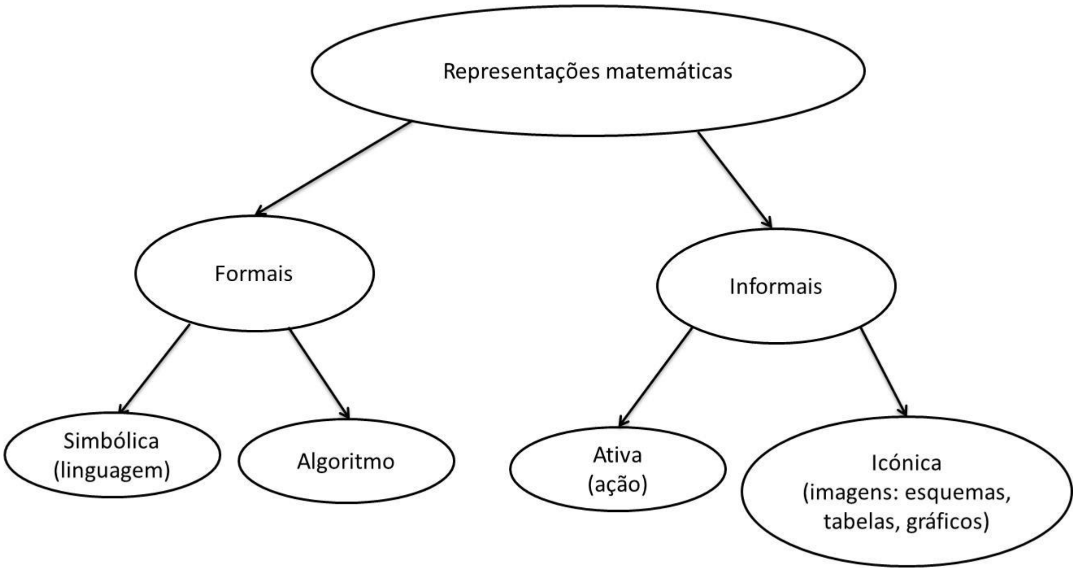


Figura 3. As representações matemáticas segundo Bruner (1999) e Ponte e Velez (2011).

Justificação

Para se entender o que se pretende analisar com as justificações apresentadas pelos alunos, é necessário fazer uma distinção entre alguns conceitos, nomeadamente explicação, justificação e argumentação. Segundo Balacheff (1988) a explicação é um discurso que pretende tornar inteligível a todos os outros, a verdade de uma proposição, já adquirida pelo locutor. Por outro lado, a justificação é o processo de apresentação de razões que são verdadeiras perante uma comunidade. Relativamente à argumentação, este processo é o mais complexo. Tal como refere Monteiro e Santos (2013) são consideradas as seguintes etapas: "(1) formular conjeturas; (2) procurar validá-las ou, pelo contrário, refutá-las, produzindo razões ou argumentos; (3) estabelecer relações entre razões e argumentos; e (4) examinar a sua aceitabilidade em relação ao modelo teórico de referência" (p. 3).

Para Balacheff (1988) a explicação é um processo simples que corresponde à clarificação de determinado conteúdo, tendo em conta a sua narração, porém para Medeiros (2010) a explicação pode ser bem mais complexa, apresentando no seu estudo, autores que discriminam diferentes conceitos de explicação, desde o mais simples ao mais envolvente. Não aprofundando esta temática, já que não é o foco deste estudo analisar os tipos de explicação, é de salientar que a autora refere que "(...) explicar, para ter algum valor, precisa ir além da simples exposição" (p. 101). Para Medeiros (2010) explicar é também fazer conexões entre conceitos, aproveitando sempre que possível o discurso dos alunos nesse sentido, caso contrário, a explicação será pobre.

A argumentação foi também aqui referida, pela sua semelhança com os conceitos de explicação e justificação. No entanto a argumentação exige um discurso no sentido de questionar, defender ou refutar determinada tese. Duval (1993, p. 39) considera que para se tratar de uma argumentação é necessário presidirem questões do tipo "porque afirmas que…?" ou "porque respondes que…?", enquanto, quando a questão é do tipo "porque ocorre…?", recorre-se somente a uma explicação.

Existem diversos estudos onde estão presentes as diferenças e semelhanças entre a explicação e a justificação em matemática, nomeadamente, Yackel e Cobb (1996), Domingos (2005) e Monteiro e Santos (2013).

Na tentativa de acompanhar as sugestões metodológicas gerais avançadas pelo ME (2002) e pelo NCTM (1994), optou-se por englobar neste estudo a análise das justificações escritas dos alunos, por ser a forma mais comum dos alunos apresentarem o seu raciocínio escrito recorrendo aos conteúdos matemáticos. De acordo com o NTCM (1994) "os alunos devem ser estimulados a explicar os raciocínios que seguiram para chegar a determinada conclusão ou para justificar porque razão o seu modo de abordar um problema é apropriado" (p. 98).

Interpretação

Em matemática, quando se pretende desenvolver uma determinada tarefa a primeira etapa a realizar é a leitura da mesma. Esta leitura ditará a forma como o aluno vai interpretar o enunciado da tarefa e posteriormente resolvê-la. Como já foi salientado anteriormente, Menezes (1996) refere que a escrita está intimamente ligada à leitura, sendo esta última fulcral para a aprendizagem matemática.

O estudo desenvolvido por Costa (2007) reflete a importância da língua portuguesa na aprendizagem da matemática, onde a autora salienta que "a interpretação e produção de enunciados implicam o conhecimento sintático da língua, sendo o resultado de uma aquisição gradual de estruturas gramaticais cada vez mais elaboradas" (p. 18). A importância da língua portuguesa na aprendizagem da matemática é de extrema relevância, no sentido em que é necessário que o aluno efetue uma leitura interpretativa sobre o enunciado ou texto, para posteriormente relacionar com os conceitos matemáticos. Polya (1995) refere quatro etapas (que serão posteriormente apresentadas e detalhadas) para a resolução de problemas, sendo a primeira delas, a compreensão do problema. Quer isto dizer que, o ponto de partida para a realização de uma tarefa está na interpretação.

2.2.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

Nesta secção serão apresentadas as metodologias de ensino e aprendizagem, nomeadamente as tarefas e o trabalho em díades e em grupo.

As tarefas

As atividades integrantes na aula de matemática determinam o ensino e aprendizagem da matemática. O professor é responsável pelas tarefas que propõe aos alunos e pelo caráter destas. Assim, "os professores são responsáveis pela qualidade das atividades matemáticas em que os alunos se envolvem" (NCTM, 1994, p. 27).

Nem sempre é fácil para um professor selecionar tarefas que sejam significativas para os alunos, isto é, que despertem o interesse do aluno. Promover atividades com alunos motivados é mais simples do que com alunos desinteressados. Refere o NCTM (2007) que "os alunos terão mais sucesso com um programa de matemática escolar que incentive o seu desejo natural de compreender aquilo que lhes é pedido para aprender" (p. 22). Neste sentido, as tarefas desenvolvidas para este estudo foram a pensar no envolvimento, interação, participação e motivação dos alunos.

Segundo o NCTM (1994),

> Os professores devem escolher e construir propostas de atividades que promovam nos alunos o desenvolvimento da compreensão dos conceitos e dos processos de uma forma que simultaneamente estimule a capacidade de resolver problemas e de raciocinar e comunicar matematicamente. As boas propostas de atividades são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que os convidam a especular e a prosseguir com as suas intuições. (p. 27)

As tarefas podem ser de diversos tipos, nomeadamente, exercícios, problemas, tarefas de investigação e de exploração (Ponte, 2005). Para se entender o porquê das tarefas escolhidas para este estudo, primeiramente é necessário descrever em que consiste cada um dos tipos de tarefas.

Segundo Ponte (2005) os exercícios e problemas são tarefas fechadas, enquanto, as tarefas de investigação e de exploração são tarefas de caráter aberto. Uma tarefa fechada é aquela onde todos os dados necessários para a sua resolução estão patentes no enunciado. O que distingue um exercício de um problema é o grau de dificuldade, já que, um problema possui um grau de desafio mais elevado. O exercício trata-se de um tipo de tarefa que é simplesmente a aplicação direta de conteúdos, apelando a um raciocínio de baixo nível.

Por outro lado, as tarefas abertas não possuem um único tipo de resolução e não é percetível de imediato o que é pedido, exige compreensão e raciocínio. A principal diferença entre uma tarefa de investigação e de exploração está, novamente, no grau de desafio, já que a tarefa de investigação acarreta um grau de desafio superior relativamente à tarefa de exploração.

Para este estudo, optou-se pelas tarefas que promovam o raciocínio e a comunicação matemática, tal como foi dito anteriormente, são aquelas que possuem um grau de desafio mais elevado, sendo portanto, as tarefas de investigação e problemas. É de salientar que, uma tarefa não está rigidamente definida, quer isto dizer que, o que para uns alunos é um exercício, para outros pode ser um problema, tudo depende do contexto em que está a ser desenvolvida e a exploração que lhe é feita.

A resolução de problemas, na visão do NCTM (1994) ultrapassa a barreira dos problemas rotineiros, pretendendo-se um processo de ensino e aprendizagem muito mais abrangente. Assim a resolução de problemas tem como objetivo ser "(...) uma atividade de exploração, de formulação de conjeturas, de observação e de experimentação" (p. 97).

Polya é um autor de referência na resolução de problemas, tendo assim proposto quatro etapas a cumprir na resolução de um problema, sendo elas: i) compreender o problema; ii) estabelecer um plano; iii) executar o plano; iv) analisar a solução obtida (Polya, 1995). Aos alunos deve-se, ao longo das aulas, incentivar à resolução de problemas, sendo que, esta só se torna relevante, se o professor a realçar e se fizer questões que levem os alunos a refletir sobre o que fizeram e como o fizeram. Tal como é referido por D'Ambrosio (2008) "o grande desafio da comunidade de educadores matemáticos é o de apoiar os professores a desenvolverem o seu repertório de problemas de alta demanda cognitiva" (p. 6).

O papel do professor torna-se fundamental na discussão de diferentes estratégias de resolução de problemas, tentando empenhar os alunos num discurso matemático sobre esta temática (NCTM, 1994, p. 97).

Polya (1995) faz ainda uma comparação entre a prática da resolução de problemas e a prática de um desporto, como a natação. Para ele, a natação é um desporto de observação e imitação, assim como, para se resolver problemas é necessário observar e imitar aqueles que os resolvem, para finalmente "aprendermos a resolver problemas, resolvendo-os" (p. 3).

No que concerne às tarefas de investigação, pode-se começar por referir, mais detalhadamente, o que estas acarretam. A tarefa de investigação é aquela que proporciona uma atividade de investigação, isto é, “a tarefa assinalada torna-se no objeto da atividade do aluno” (Christiansen & Walther, 1986, p. 3). Sendo assim as “atividades de investigação designam um tipo de atividade em que é dada ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjeturas, refletir e generalizar” (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998, p. 3).

São vários os autores que referem as investigações matemáticas como tarefas abertas que acarretam um elevado grau de desafio. Os objetivos das tarefas de investigação são promover o desenvolvimento da compreensão de conceitos, estimular a argumentação, envolvimento, participação do aluno, o raciocínio e desenvolver a comunicação matemática (NCTM, 1994; Abrantes, Leal & Ponte, 1996; Oliveira, Segurado & Ponte, 1998; Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999; ME, 2002; Ponte, 2005).

Segundo Oliveira, Segurado e Ponte (1998) existem três fases para a realização de uma investigação, são elas: i) introdução da tarefa pelo professor; ii) realização da tarefa (interação do professor com os alunos); iii) apresentação dos resultados pelos alunos e a sua discussão.

Em qualquer tarefa de investigação, o papel do professor é fundamental, no sentido de orientar o processo de ensino e aprendizagem. O professor deve conduzir o discurso de forma a atingir o que é pretendido, utilizando para tal, questões que se centrem no raciocínio matemático. O professor deve, igualmente, incitar os alunos a participarem, a colocarem questões, tanto ao professor como aos colegas, de forma a discutirem e explicarem matemática entre si (NCTM, 1994; Oliveira, Segurado & Ponte, 1998; Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999; Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira & Oliveira, 1999).

Pelo que foi até aqui referido, os problemas e as investigações foram o tipo de tarefas escolhidas para a intervenção pedagógica. Foram selecionadas devido ao seu grau de desafio mais elevado, sendo assim adequadas para o desenvolvimento da comunicação matemática (ME, 2002; NCTM, 1994).

O trabalho em díades e em grupo

Segundo o programa do ensino secundário, “o trabalho de grupo e em pares favorece a comunicação matemática pois os estudantes ganham em partilhar com os colegas e com o professor os seus métodos de resolução ou as justificações dos seus raciocínios” (ME, 2002, p. 12).

Se se analisarem as etapas apresentadas para a realização de tarefas de investigação segundo Oliveira, Segurado e Ponte (1998), a terceira etapa refere que os resultados devem ser apresentados e discutidos pelos alunos. Desta forma, antes da apresentação/exposição do que foi desenvolvido, existe uma análise, exploração, reflexão e discussão da tarefa, que será, sem dúvida, enriquecida se for realizada em díades ou em grupo. Neste contexto refere o NCTM (1994) "trabalhar em grupo é uma excelente forma de levar os que estão a aprender a fazer explorações, desenvolver argumentos matemáticos, formular conjeturas, validar possíveis soluções e encontrar conexões entre diferentes ideias matemáticas" (p. 131), isto é, exatamente, o que se pretende com as investigações matemáticas.

O trabalho de grupo é a melhor forma de realizar atividades de investigação e de exploração. O trabalho em pequeno grupo permite desenvolver capacidades que dificilmente serão conseguidas individualmente ou em grande grupo, tais como, "cooperação, interajuda, trabalho em equipa, organização" (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998, p. 15).

2.2.2. Estratégias de investigação e avaliação da ação

Para a análise deste estudo, a principal estratégia de investigação/avaliação da ação foi a recolha das produções escritas dos alunos. As produções escritas dos alunos foram de dois tipos, fichas de avaliação e tarefas desenvolvidas durante as aulas de matemática. É de salientar que uma das fichas de avaliação foi utilizada como recolha diagnóstica, cujos dados foram utilizados como ponto de partida para este estudo.

As informações recolhidas tinham como objetivo analisar o desempenho e evolução da comunicação matemática escrita dos alunos ao longo da intervenção pedagógica.

Recolha diagnóstica

Para a realização e recolha de produções escritas dos alunos durante as aulas de matemática foi necessário solicitar autorização ao diretor da escola (Anexo 1).

Ao iniciar a minha intervenção pedagógica foram recolhidos elementos de uma ficha de avaliação realizada pelos alunos. Esta ficha de avaliação foi realizada em díades, com o objetivo da professora da turma avaliar os alunos à disciplina de matemática. Dado que o tema deste estudo não incide sobre um conteúdo específico da matemática, não foi necessário elaborar um teste diagnóstico exclusivo para o efeito. Posto isso, recolheu-se e analisou-se uma das questões dessa ficha de avaliação, isto é, investigou-se o uso da linguagem matemática, a justificação dos procedimentos escritos e a interpretação dos mesmos, por parte dos alunos.

É de salientar que se optou por utilizar uma ficha de avaliação, como recolha diagnóstica, para que, a fiabilidade dos resultados fossem maiores, pois os alunos sabiam que estavam a ser avaliados e, provavelmente fizeram o seu melhor.

Na fase final deste estudo, esta recolha foi igualmente útil, para analisar a evolução dos procedimentos escritos dos alunos quanto à sua capacidade de comunicação matemática escrita. Ponte e Grossmann (2011) e Ponte e Quaresma (2011) apresentam em seus estudos recolhas diagnósticas, com o objetivo de compreender como decorre a aprendizagem dos alunos em determinado conteúdo matemático.

Recolha de elementos das fichas de avaliação e tarefas

As tarefas implementadas na sala de aula foram tarefas de investigação e problemas, umas realizadas em díades e outras em grupos de quatro elementos, algumas das quais com recurso à calculadora gráfica, tendo sempre em vista os conteúdos a lecionar no 11.º ano de escolaridade, segundo as referências patentes no programa do ensino secundário.

A recolha das produções escritas foram de dois tipos, uma relativa às fichas de avaliação dos alunos, incluindo a análise de uma questão do teste intermédio realizado a nível nacional, e as outras recolhas foram relativas às tarefas de investigação e problemas desenvolvidos durante a intervenção pedagógica.

Aquando a realização de cada tarefa foi solicitado aos alunos que dialogassem entre si, e que apenas registassem na folha de papel a resolução que todos os elementos da díade ou grupo concordassem. Os alunos "(...) devem falar uns para os outros, procurando convencer ou questionar os seus colegas" (NCTM, 1994, p. 48). No final de cada tarefa, esta era recolhida, e de seguida procedia-se à discussão em grande grupo, quer isto dizer, envolvendo os alunos e professora. A tarefa era recolhida antes da discussão, para que os alunos não alterassem as suas resoluções ao longo do debate, e como trabalhavam dois alunos ou mais, possuíam duas resoluções (ou mais) da tarefa para poderem participar na discussão de resultados.

As questões de investigação deste estudo centraram-se na análise da linguagem matemática, justificação e interpretação dos alunos, aquando a realização de fichas de avaliação e de tarefas matemáticas, tendo sido, as produções escritas dos alunos o material imprescindível para a realização dessa análise.

CAPÍTULO III

INTERVENÇÃO

Neste capítulo apresentam-se os resultados recolhidos e analisados durante o plano de intervenção pedagógica. O capítulo está seccionado em sete partes, onde cada secção corresponde a um elemento recolhido e analisado. Dada a natureza deste estudo (comunicação escrita), somente as aulas onde se procedeu à recolha de produções escritas foram consideradas neste capítulo.

Na tabela 1 apresentam-se, assim, as tarefas desenvolvidas durante a intervenção pedagógica, os respetivos objetivos e a duração de cada aula. É de salientar que a ordem pela qual são apresentados os elementos recolhidos, corresponde à ordem cronológica com que foram realizados.

Tabela 1

Síntese das tarefas desenvolvidas e analisadas ao longo da intervenção.

Elementos Recolhidos	Duração da Aula	Tarefas Desenvolvidas	Objetivos
1	90’	Ficha de avaliação realizada pelos alunos.	Analisar, diagnosticamente, as produções escritas dos alunos.
2	90’	Tarefa de investigação sobre transformações de funções racionais. Discussão em grande grupo sobre os resultados obtidos.	Identificar a função $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$ como uma função racional; Explorar/interpretar como se pode obter a função $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$ através da função $f(x) = \frac{1}{x}$; Interpretar quais as características (domínio, contradomínio e assíntotas) que se alteram na função para diferentes valores de a, b, c e d.
3	90’	Ficha de avaliação realizada pelos alunos.	Analisar uma das questões da ficha de avaliação, para verificar a evolução, ou não, das produções escritas dos alunos.
4	90’	Tarefa motivacional sobre equações fracionárias.	Identificar e resolver equações fracionárias.
5	90’	Tarefa motivacional sobre inequações fracionárias.	Identificar e resolver inequações fracionárias.
6	90’	Recolha do teste intermédio realizado pelos alunos.	Analisar uma das questões do teste intermédio, para verificar a evolução, ou não, das produções escritas dos alunos.
7	90’	Tarefa motivacional sobre a função inversa. Apresentação e exploração dos resultados obtidos por parte dos alunos.	Identificar, interpretar e determinar a inversa de uma função.

Para mais facilmente se compreender a análise dos dados recolhidos, de seguida apresenta-se uma pequena descrição de como foram organizados os dados. Como se pode verificar na tabela 1 foram recolhidos sete elementos para análise. Dos sete elementos, três são fichas de avaliação e quatro são tarefas.

Relativamente às três fichas de avaliação, uma foi realizada em díades (recolha diagnóstica) e as outras duas individualmente, sendo que uma das fichas de avaliação realizada individualmente corresponde ao teste intermédio. No que concerne às tarefas, uma foi realizada em díades e as três restantes em grupos de quatro elementos.

Para a avaliação de resultados, dos testes que foram realizados individualmente, estipulou-se que cada aluno seria referenciado com a letra A seguida de um número, isto é, a designação é do tipo A1, A2, A3, ..., A23, A24. Dada a disposição dos alunos na sala de aula, quando as tarefas eram realizadas em díades, os alunos eram agrupados dois a dois, tal e qual, como se encontravam na sala, não existindo qualquer alteração para a realização da tarefa. Desta forma os alunos A1 e A2 formavam a díade número um (D1), os alunos A3 e A4, a D2 e assim sucessivamente.

Por último, as tarefas realizadas em grupo de quatro elementos correspondiam aos quatro primeiros alunos de uma fila, quer isto dizer que os dois alunos da mesa da frente agrupavam-se com os dois elementos imediatamente atrás. Assim, o grupo número um (G1) era formado pelos alunos A1, A2, A3 e A4, ou igualmente, pelas díades D1 e D2. Esta informação está presente na tabela 2.

Excecionalmente a ficha de avaliação realizada em díades, isto é, a que corresponde à recolha diagnóstica, não seguiu a configuração da tabela 2, pois dada a natureza da ficha, a professora da turma optou por agrupar os alunos segundo as suas classificações na ficha de avaliação anterior. Desta forma, na análise desta ficha de avaliação utilizou-se a designação relativa aos alunos e não às díades.

Tabela 2

Distribuição dos alunos da turma em díades e em grupos.

Alunos	Díades	Grupos
A1 A2	D1	G1
A3 A4	D2	
A5 A6	D3	G2
A7 A8	D4	
A9 A10	D5	G3
A11 A12	D6	
A13 A14	D7	G4
A15 A16	D8	
A17 A18	D9	G5
A19 A20	D10	
A21 A22	D11	G6
A23 A24	D12	

3.1. Ficha de Avaliação 1

A ficha de avaliação 1 consistiu numa ficha realizada pelos alunos para avaliar os seus conhecimentos à disciplina de matemática. Para o presente estudo, esta recolha teve uma função diagnóstica como forma de analisar as produções escritas dos alunos quanto ao uso da linguagem matemática, da justificação e interpretação.

Assim sendo, analisou-se a questão número 2.3 (figura 4) da ficha de avaliação (Anexo 2) do dia 15/01/2013, realizada em díades, tendo havido uma tríade, já que uma aluna faltou, tendo realizado posteriormente a ficha de avaliação individualmente.

Escreve a equação cartesiana do plano que contém a base da pirâmide.

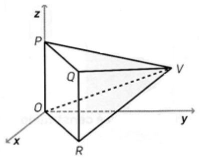


Figura 4. Questão 2.3. da ficha de avaliação 1.

Antes de passar à análise propriamente dita, é de referir que, nesta alínea, os alunos tinham que apresentar várias etapas até conseguirem alcançar a resposta final. Era solicitada a equação do plano, onde para tal os alunos tinham de encontrar o vetor e um ponto desse plano. O vetor do plano é o vetor normal a esse plano, logo era necessário justificar que a reta que contém a altura da pirâmide, é aquela que contém o vetor normal ao plano. O ponto, por sua vez, bastava ser qualquer um dos quatro da base da pirâmide. A equação pedida era relativa ao plano, cuja equação era dada por $3x - 4y = 0$.

Linguagem matemática

Esta questão é um exemplo concreto onde é necessário usar a simbologia matemática para a resolução da equação. Na sua realização, vários alunos não apresentaram a equação geral do plano, $ax + by + cz + d = 0$, antes de iniciarem a resolução, isto é, automaticamente apresentam a equação com os valores dos coeficientes já substituídos. Outra situação a mencionar é o facto dos alunos, frequentemente, não colocarem o símbolo de equivalência nas várias fases da resolução da equação, simbologia característica da matemática. Na figura 5 apresenta-se a resolução dos alunos A10 e A23.

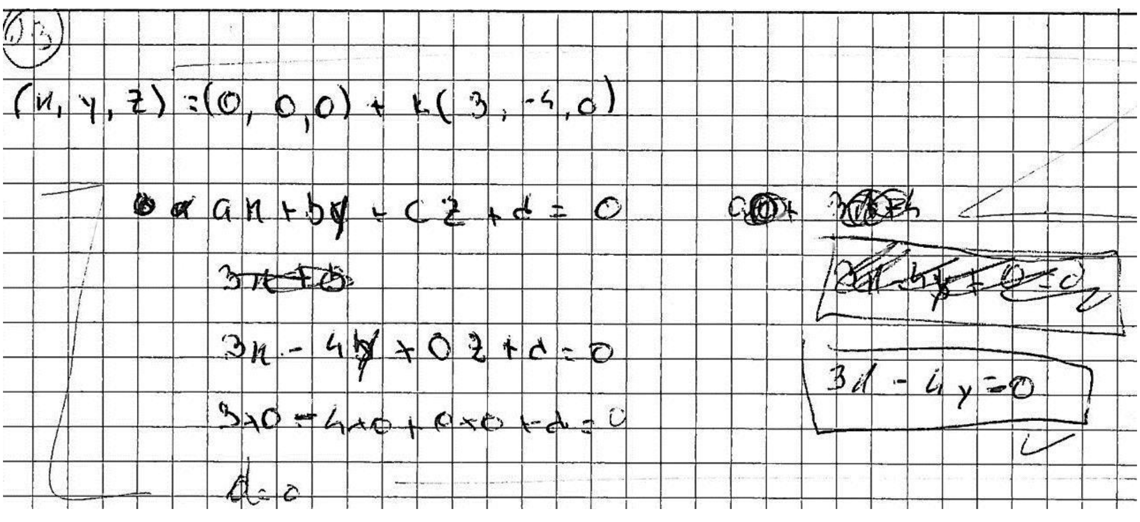


Figura 5. Resolução dos alunos A10 e A23 à questão 2.3.

Os alunos A10 e A23 foram os únicos que conseguiram resolver corretamente esta questão, recorrendo à representação simbólica. Neste caso, os alunos apresentaram a equação geral do plano, apenas não aplicaram o símbolo de equivalência na resolução da equação.

Justificação

No que concerne à justificação dos procedimentos utilizados, maioritariamente os alunos não os justificam, isto é, os alunos deveriam justificar, nesta questão, a escolha do vetor e do ponto utilizado, para encontrarem a equação geral do plano, enquanto, os alunos raramente o fizeram. Simplesmente apresentaram o vetor e diretamente o substituíram na equação geral do plano. Para a escolha do ponto, a situação repetiu-se, automaticamente foi substituído, sem se entender o porquê de estar a ser utilizado.

Os alunos A13 e A24 foram os que justificaram de forma mais completa os seus procedimentos, apesar de terem respondido erradamente à questão. Utilizaram a representação simbólica da matemática, para justificarem a escolha do vetor pretendido.

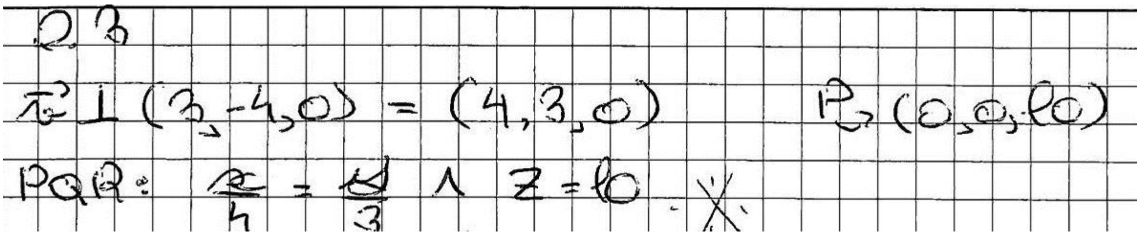


Figura 6. Resolução dos alunos A13 e A24 à questão 2.3.

Como se pode constatar na figura 6, os alunos indicaram que o vetor $\vec{v}$ é perpendicular a $(3, -4, 0)$, obtendo desta forma o vetor a utilizar na equação pretendida. Também indicaram o ponto que escolheram, P, e as respetivas coordenadas. No entanto, não responderam ao que lhes era solicitado, pois apresentaram a equação de uma reta ao invés da equação do plano.

Interpretação

A leitura e análise da figura eram essenciais para a interpretação deste problema. Nenhuma díade apresentou qualquer esquema ou diagrama que auxiliasse na perceção do que era solicitado. Provavelmente pelo défice de interpretação do que se pedia, os alunos apresentaram o vetor, sem justificar a escolha. Vários alunos demonstraram que o vetor provinha de uma das arestas da base da pirâmide, sem relacionarem com a reta que intersetava o centro da base de forma perpendicular.

Pode-se dizer que cerca de 92% dos alunos, não conseguiram encontrar a chave da resolução do problema, já que apresentaram vetores incorretos ou, ainda, apresentaram a equação cartesiana da reta, enquanto, era solicitada a do plano. Ainda se pode referir que alguns alunos não resolveram esta alínea do problema, possivelmente pela dificuldade na interpretação.

3.2. Tarefa 1

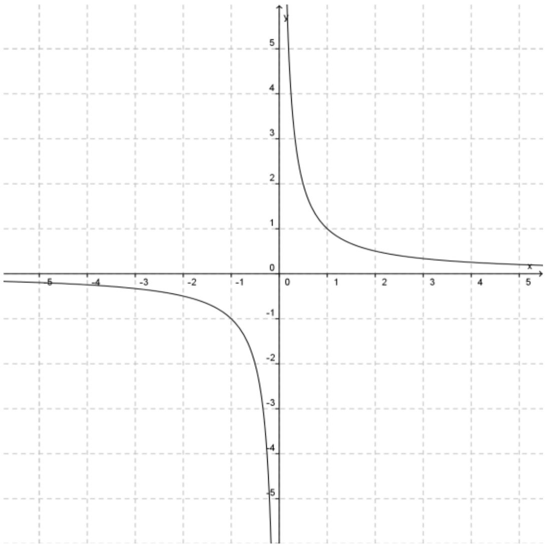
A tarefa 1, designada por tarefa de transformações de funções racionais, foi elaborada com o intuito dos alunos explorarem diferentes situações de transformações de funções racionais, tendo em conta que os valores atribuídos para a investigação dos diferentes casos eram escolhidos pelos próprios alunos. Assim sendo, esta tarefa foi classificada como uma tarefa de investigação, dado o seu caráter aberto, em que os alunos poderiam analisar todas as situações que considerassem pertinentes.

Esta tarefa foi realizada em díades, com recurso à calculadora gráfica, para investigação da mesma. Na figura 7 apresenta-se parte da tarefa 1 (Anexo 3), que corresponde à investigação proposta.

Nas alíneas a), b) e c), as díades tinham de escolher os valores que pretendiam atribuir para as incógnitas *a, b* e *d*, onde posteriormente iriam analisar as transformações sugeridas em cada alínea. A exploração deu-se através da calculadora gráfica, não havendo limite máximo ou mínimo para a atribuição de valores, cada díade tinha de explorar consoante as suas necessidades de compreensão.

Em todas as díades, praticamente, os valores testados foram diferentes. Na atribuição de valores a *a, b* e *d* foram utilizados valores inteiros, positivos e negativos, e números fracionários, sendo que, nenhuma das duplas experimentou todos esses casos. A única situação testada por todos os alunos foram os valores inteiros positivos.

Sabe-se que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é a função base da família de funções racionais e que o seu gráfico é:



Para cada uma das seguintes alíneas, utiliza a calculadora gráfica para analisares diferentes situações, segundo o que é indicado. Formula conjeturas, testa-as e generaliza-as.

a) Se considerarmos a função $f(x) = \frac{b}{x}$, sendo que $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, investiga o que acontece para diferentes valores de b.

b) Mantendo o valor de b constante, se à função f adicionarmos o parâmetro a, obtém-se a função $g(x) = a + \frac{b}{x}$. Conjetura acerca do que acontece à função g para diferentes valores de a.

c) Mantendo os valores de a e b constantes, se a função g passar a ser do tipo $h(x) = a + \frac{b}{x+d}$, o que acontece para diferentes valores de d?

Figura 7. Alíneas a), b) e c) da tarefa 1.

Linguagem matemática

A linguagem utilizada nesta tarefa retrata uma linguagem matemática escrita, já que, era solicitado aos alunos para investigar, testar, conjeturar, quais os valores possíveis para cada uma das incógnitas *a, b* e *d* e posteriormente que os registassem na folha para entrega. Esperava-se que os alunos apresentassem uma resposta escrita das suas conclusões, utilizando a referência a vetores de translação, associados às transformações, por eles conhecidos no 10.º ano de escolaridade.

No que concerne à representação da linguagem matemática na tarefa 1, a questão da alínea a) solicitava aos alunos uma exploração mais simples de explicitar do que as alíneas b) e c), que já englobavam conceitos específicos da matemática. Na alínea a) os alunos deveriam referir que para diferentes valores de *b*, a função aproximava-se ou afastava-se da origem do referencial, o que, praticamente todas as díades o disseram. Contudo, por vezes, a forma como o disseram não foi a mais coerente, tal como se pode verificar na figura 8.

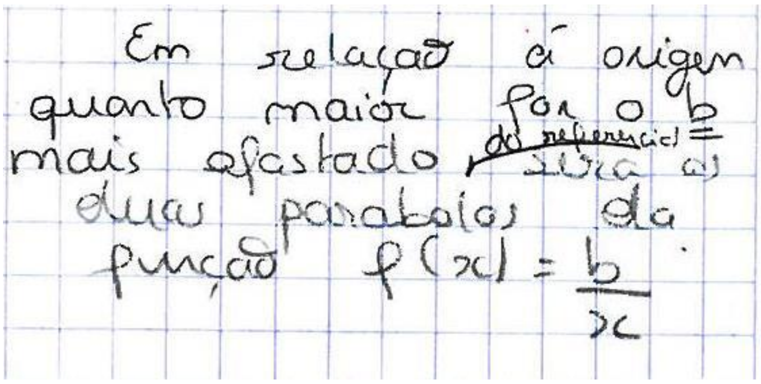


Figura 8. Resolução da díade D10 à alínea a) da tarefa 1.

A resposta dada pela díade D10 é percetível ao nível da representação simbólica, porém o conceito de parábola não foi aplicado corretamente, já que não se trata de parábolas, mas sim de hipérboles.

Relativamente à alínea b), pretendia-se que os alunos analisassem a translação efetuada verticalmente. Na figura 9 regista-se a resposta da díade D1 à alínea b) da tarefa 1.

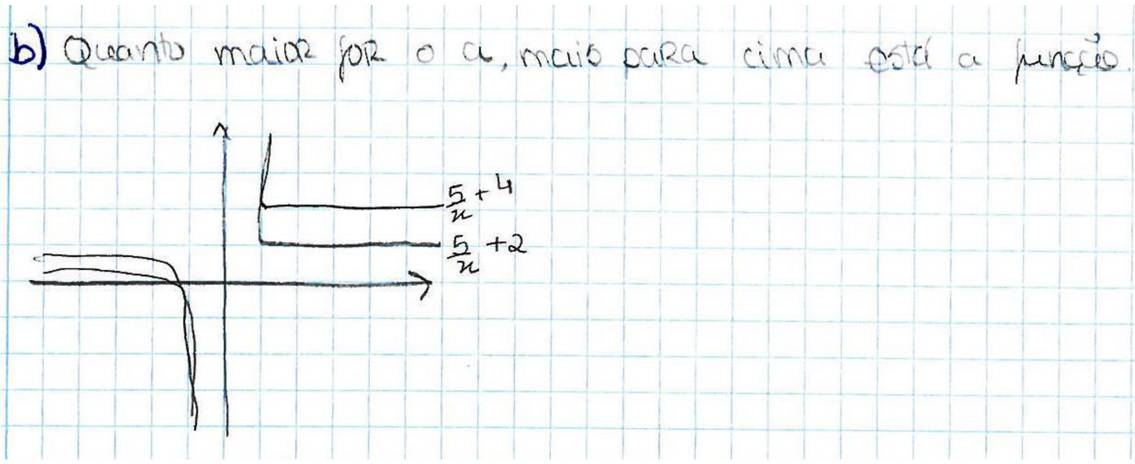


Figura 9. Resolução da díade D1 à alínea b) da tarefa 1.

O gráfico, apesar de pouco rigoroso, auxilia a perceção do que os alunos queriam referir com "mais para cima está a função", provando a necessidade da representação icónica. Tal como esta díade, todas as outras utilizaram representações icónicas e simbólicas, no entanto o vocabulário matemático não foi totalmente específico, já que não referiram que a transformação está associada à translação segundo o vetor de coordenadas (0, a). É de salientar que apenas três das doze díades utilizaram valores positivos e negativos na análise da translação proposta na alínea b). Na figura 10 encontra-se um exemplo desta situação.

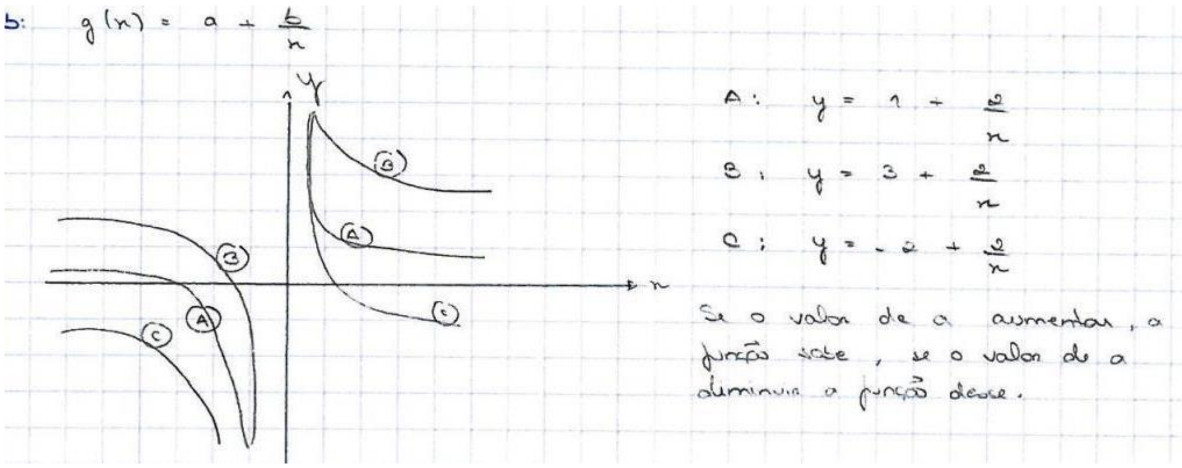


Figura 10. Resolução da díade D5 à alínea b) da tarefa 1.

A nível das representações apresentadas pelos alunos, verificou-se novamente o uso de representações simbólicas e icónicas. A exploração efetuada por esta díade foi mais completa que a anterior, pelo facto de terem atribuído valores positivos e negativos. No entanto, a utilização do conceito formal de translações, não foi mencionado por qualquer díade.

Durante a realização da alínea c), o panorama repetiu-se, no sentido em que, apenas três das doze díades (as mesmas que na alínea anterior) efetuaram a análise para valores positivos e negativos. Uma possível resolução que represente esta situação é a da figura 11.

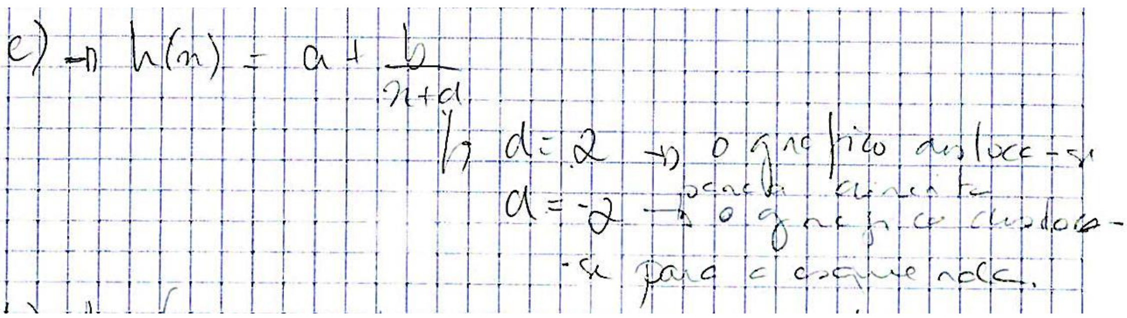


Figura 11. Resolução da díade D8 à alínea c) da tarefa 1.

Esta díade utilizou apenas a representação simbólica, recorrendo às características da matemática e à linguagem corrente.

Justificação

A justificação dos procedimentos passa por responder de forma completa a um determinado enunciado. Nesta tarefa em concreto, que se trata de uma tarefa de investigação, esperava-se que os alunos esgotassem todas as possibilidades de exploração, como forma de justificar as suas conclusões.

Neste contexto foi analisada quanto à justificação a alínea a) da tarefa 1 (figura 12). O que se pretendia nesta alínea era que os alunos explorassem todos os valores que *b* pudesse tomar. Como foi já referido, em geral, os alunos aplicaram diferentes tipos de números, positivos, negativos e fracionários, apesar de existir grande afluência em valores inteiros positivos. Além da investigação com diferentes valores de *b*, era importante que as díades referissem a alteração da função (hipérbole) relativamente aos seus quadrantes, quando *b* altera o seu valor de positivo para negativo e vice-versa. Esta situação foi salientada, apenas, por duas díades.

Nesta tarefa em particular, por se tratar de uma tarefa de investigação, as questões que foram colocadas aos alunos eram no sentido da investigação/exploração, de forma que os alunos compreendessem os novos conteúdos relacionados com as transformações de funções racionais. Sendo assim, não foram solicitadas aos alunos justificações extensas, mas sim, relações entre conteúdos.

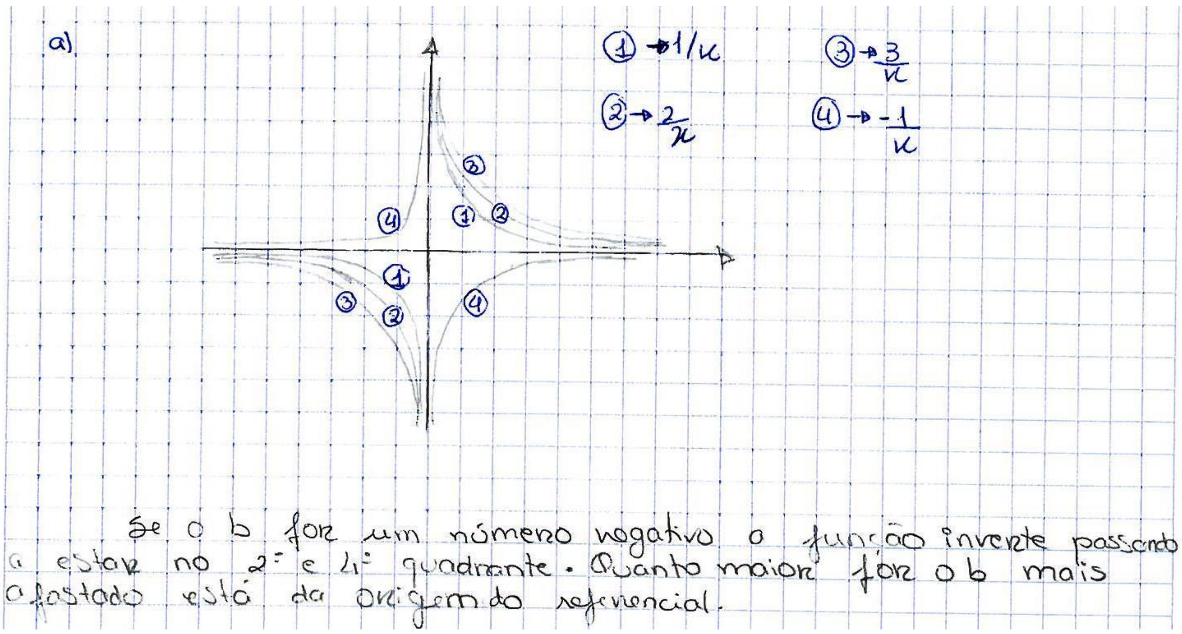


Figura 12. Resolução da díade D6 à alínea a) da tarefa 1.

Interpretação

A interpretação está relacionada com a capacidade do aluno compreender um enunciado ou um procedimento escrito.

Acerca da tarefa 1 são de referir duas situações, uma relativa às alíneas b) e c) e outra relativa à alínea d). As alíneas b) e c) já foram analisadas quanto à linguagem matemática, e quanto à interpretação não se teria grande observação a fazer, não fosse, uma díade ter apresentado uma interpretação diferente de todas as outras. Quando se questionava, o que acontecia à função para diferentes valores de *a* e de *d*, esperava-se que os alunos referissem a translação associada a cada um destes casos. Porém, a díade D7, salientou o que acontecia às assíntotas, isto é, que o valor de *a* alterava a assíntota horizontal e que o valor de *d* alterava o valor da assíntota vertical. Na figura 13 apresenta-se tal resolução.

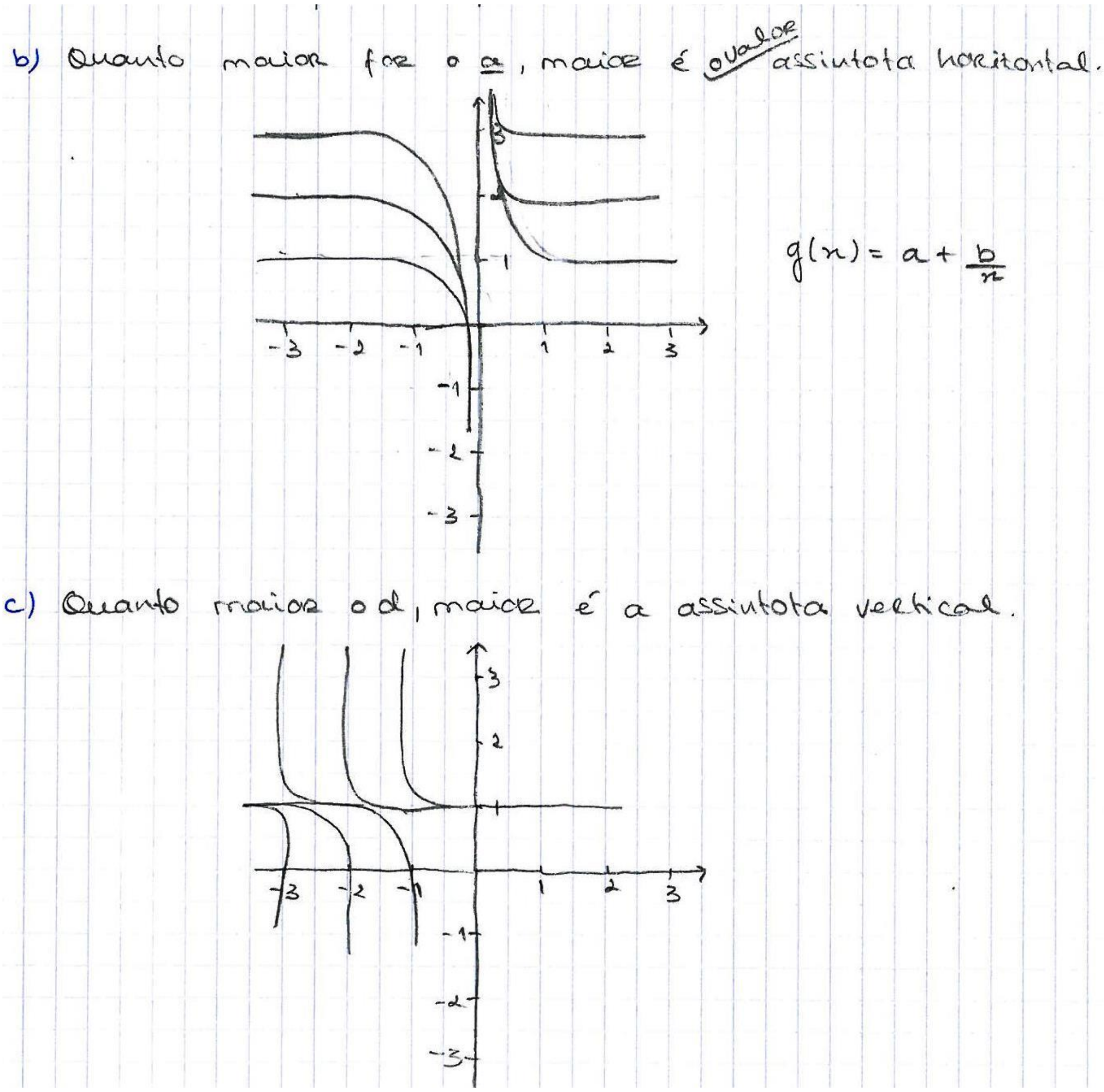


Figura 13. Resolução da díade D7 às alíneas b) e c) da tarefa 1.

Verificou-se que a díade D7 não analisou corretamente o caso da alínea c), visto que, apresentaram o gráfico corretamente, todavia não concluíram que o valor da assíntota vertical é menor, quanto maior o valor de d. Esta resolução foi selecionada pelo facto de ser diferente de todas as outras, já que mais nenhuma díade seguiu este procedimento. Por outro lado, é também de salientar este caso, pois os alunos apresentaram dificuldades em relacionar os valores do parâmetro d, com a assíntota vertical.

Passando agora à análise da alínea d) (figura 14), pode-se começar por relembrar a questão que era colocada.

d) Tendo em conta as alíneas anteriores, que parâmetros a, b e d alteram o domínio, contradomínio e assíntotas (verticais e horizontais)?

Figura 14. Alínea d) da tarefa 1.

Entende-se que as respostas a esta questão estão mais relacionadas com a interpretação, do que com a linguagem matemática e a justificação. Ao realizar esta alínea da tarefa, os alunos podiam apresentar respostas curtas e sem qualquer justificação, já que, nada era pedido nesse sentido. Contudo, a relação exigida entre os parâmetros apresentados e as características de uma função, carecem de uma interpretação mais intensificada.

Antes de apresentar as produções escritas dos alunos para este caso, é fundamental referir que, várias díades não concluíram esta alínea da tarefa por défice de tempo. No início da tarefa foi estipulado o período de tempo que os alunos tinham para realizar a tarefa, e finalizado esse tempo passou-se à discussão da mesma.

Dos alunos que conseguiram terminar esta alínea da tarefa, pode-se dizer que, maioritariamente conseguiram relacionar com o que era solicitado, apenas uma díade não o fez na sua totalidade (não relacionou com as assíntotas, apenas com o domínio e contradomínio). Na figura 15 encontra-se uma resolução completa da alínea d).

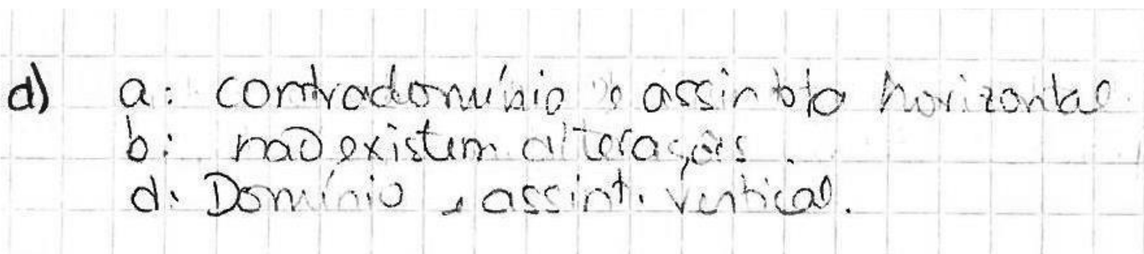


Figura 15. Resolução da díade D2 à alínea d) da tarefa 1.

É de salientar que ao iniciar esta tarefa, várias díades apresentaram dificuldades em começar a realizá-la, já que não estavam a compreender o que era solicitado. Posto isto, a professora sentiu a necessidade de conversar com os alunos sobre o conteúdo da tarefa, esclarecendo dúvidas, para que posteriormente pudessem desenvolvê-la autonomamente, tal como se verificou.

3.3. Ficha de Avaliação 2

A ficha de avaliação 2 foi mais um momento de avaliação dos alunos desta turma, à qual se procedeu no final da mesma, à respetiva recolha para análise. A ficha de avaliação em questão foi realizada no dia 04/02/2013, individualmente, tendo-se analisado a questão número 4.3 (Anexo 4). É de salientar que se explorou tal questão, por ser, a que mais se assemelhava com os conteúdos abordados na intervenção pedagógica (tarefa 1), dias antes da realização da ficha de avaliação em questão, fazendo todo o sentido analisar a evolução dos alunos neste conteúdo matemático. A questão analisada encontra-se na figura 16.

Seja $g(x) = f(x+4) + 1$. Justifica como se pode obter uma representação gráfica da função g a partir da representação gráfica da função f e indica as assíntotas do gráfico de g.

Figura 16. Questão 4.3 da ficha de avaliação 2.

Com esta questão pretendia-se que os alunos efetuassem as translações solicitadas e que justificassem quais os valores das novas assíntotas, sabendo que as assíntotas do gráfico de f eram $x = 3$ e $y = 1$.

Linguagem matemática

Esta questão é bastante idêntica à que foi abordada na aula sobre transformações, isto é, na aula em que foi realizada a tarefa 1. Neste caso, esta questão não era desconhecida dos alunos.

Relativamente à linguagem matemática, todos os alunos que responderam à questão, apresentaram um pequeno texto com a explicação das transformações efetuadas e das assíntotas obtidas na nova função. Na figura 17 encontra-se uma resolução que representa esta situação.

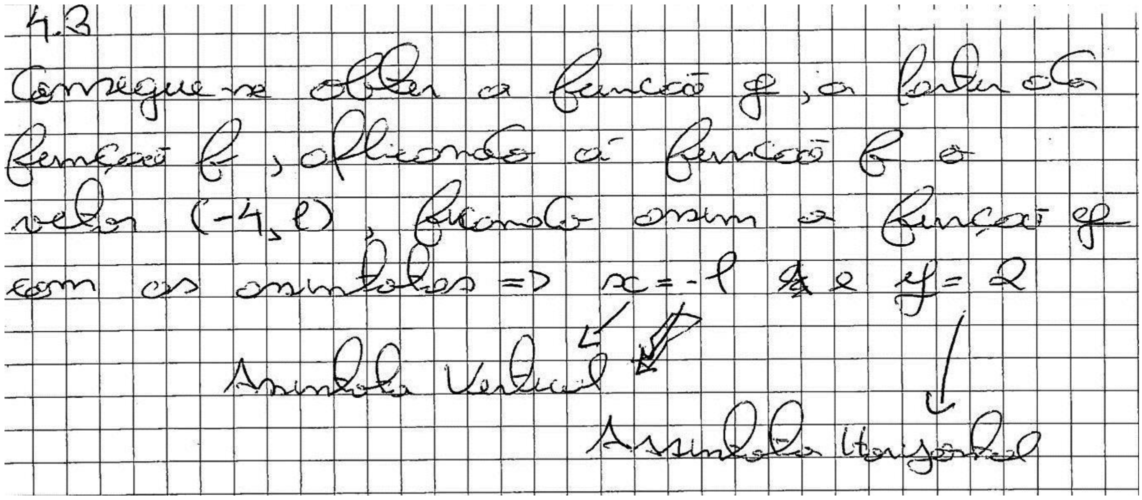


Figura 17. Resolução do aluno A13 à questão da ficha de avaliação 2.

Como se consegue verificar pela figura 17, a linguagem utilizada é simbólica, ou seja, os alunos recorreram à linguagem corrente e à linguagem própria da matemática para apresentarem a sua resposta. É de salientar que nem todos os alunos mencionaram a translação de vetor $(-4, 1)$ recorrendo ao simbolismo matemático, no entanto fizeram-no textualmente.

Apenas um aluno, além da linguagem simbólica, recorreu igualmente à representação gráfica para mais facilmente compreender o que lhe era solicitado, utilizando assim a representação icónica.

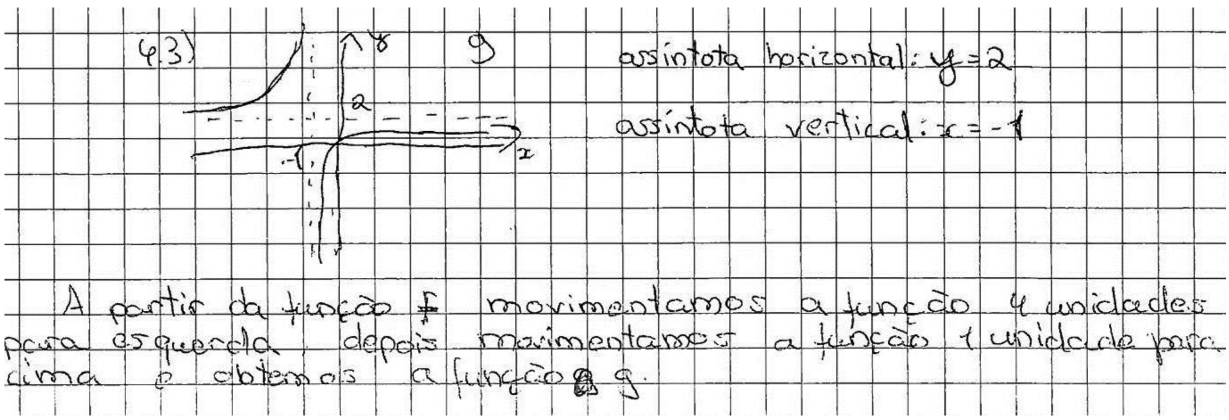


Figura 18. Resolução do aluno A2 à questão da ficha de avaliação 2.

Na figura 18 verifica-se o recurso a dois tipos de linguagem matemática, à linguagem simbólica, mais concretamente à linguagem corrente, sem utilizar o vocabulário específico da matemática (sem relacionar com as translações) e o recurso à representação icónica aquando o uso de representações gráficas como auxílio na resolução da questão.

Justificação

A nível da justificação dos procedimentos escritos, pode-se dizer que, nesta questão os resultados foram bem conseguidos. Dos alunos que resolveram a questão, todos eles apresentaram um pequeno texto onde justificaram como alcançaram os valores das assíntotas. No entanto, nem sempre a justificação foi coerente. Existiram dois tipos de falhas cometidas pelos alunos, ambas relativas aos conteúdos matemáticos. A primeira refere-se ao facto dos alunos não se recordarem que a translação no eixo das abscissas tem deslocação contrária ao sinal representado na função de transformação, a segunda relaciona-se com a troca das assintotas por parte dos alunos, isto é, a transformação associada à assíntota vertical era considerada como assíntota horizontal e vice-versa.

Dadas as falhas apresentadas pelos alunos, as suas justificações nem sempre foram corretas, mesmo assim, apesar da confusão entre os conteúdos, os alunos não desistiram de justificar.

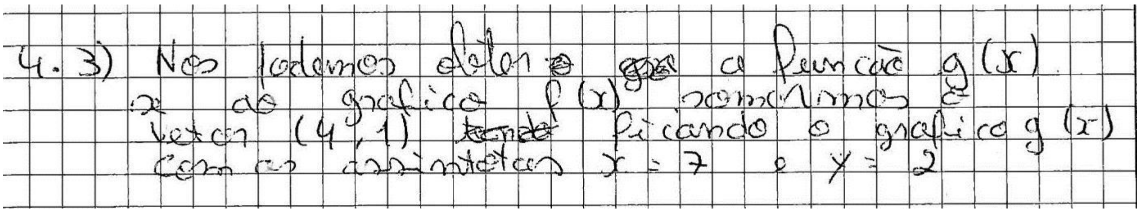

4.3) Nós podemos dizer que a função g(x) é ao gráfico f(x) somarmos o vetor (4, 1) ~~tendo~~ ficando o gráfico g(x) com as assíntotas x = 7 e y = 2

Figura 19. Resolução do aluno A20 à questão da ficha de avaliação 2.

A resposta apresentada na figura 19 é uma das respostas que reflete uma das falhas mencionadas anteriormente. O aluno não teve a perceção que a translação $g(x) = f(x+4)$ estava associada ao vetor $(-4, 0)$. De qualquer forma, e mesmo usando uma linguagem corrente o aluno justificou as suas opções.

Interpretação

A questão analisada não era complexa. Tratava-se de uma questão objetiva, que não requeria uma interpretação deveras profunda. Dos vinte e quatro alunos da turma, cinco não responderam a esta questão. Dos que responderam, todos apresentaram uma justificação coerente, apesar de em alguns casos terem cometido falhas, no que concerne ao próprio conteúdo matemático.

3.4. Tarefa 2

A tarefa 2 (Anexo 5) corresponde ao quarto elemento recolhido, tendo sido desenvolvida com o objetivo dos alunos aprenderem a identificar e resolver equações fracionárias. Esta tarefa foi classificada como problema, dado o seu caráter fechado, pelo que só existe uma única solução em cada questão da tarefa. Apesar da tarefa apresentar um caráter simplista nas suas questões, não foi classificada como exercício, mas sim problema, por ser um conteúdo completamente desconhecido dos alunos, tendo sido necessário subdividir a tarefa em etapas para que compreendessem e descobrissem o processo de resolução de equações fracionárias.

Esta tarefa foi realizada em grupos de quatro elementos, com recurso à calculadora gráfica, nas questões que assim lhes era solicitado.

A alínea a) desta tarefa teve como objetivo enquadrar os alunos no problema que iriam desenvolver, sendo uma questão muito objetiva.

a) Quando o clube iniciou, quantos alunos estavam inscritos?

Figura 20. Alínea a) da tarefa 2.

Linguagem matemática

A alínea b) acarretava os novos conteúdos que deveriam ser desenvolvidos pelos alunos, por etapas, tal como lhes era sugerido. Na realização desta questão, os alunos tinham apenas um processo de resolução, muito característico da matemática, quer isto dizer que, a linguagem simbólica era repleta de especificidades da matemática, própria da resolução de equações.

b) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, indica o ano e o mês em que o clube terá 250 alunos inscritos. Sugestão: Começa por escrever a equação na forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. De seguida resolve a equação aplicando $P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0$.

Figura 21. Alínea b) da tarefa 2.

Além desta alínea se poder caracterizar pela sua linguagem simbólica, pode-se igualmente caracterizar como um algoritmo, já que existe apenas um processo de resolução de forma a encontrar a solução final. Este processo foi aquele que foi fornecido aos alunos através de etapas.

As principais dificuldades demonstradas (figura 22) foram no uso dos símbolos de conjunção (∧) e de disjunção (∨). Aquando a aplicação da fórmula resolvente, o grupo G3 utiliza o símbolo de conjunção ao invés da disjunção. Nesta situação pode-se referir que existe uma falha na compreensão do sentido de símbolo por parte dos alunos, já que, a dificuldade não aparenta ser quando aplicar o símbolo, mas sim, qual o símbolo a aplicar.

$(=)\ t^2 + 0,5t - 3 = 0 \wedge t + 2 \neq 0$

$(=)\ t = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,5^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \wedge t \neq -2$

$(=)\ t = \frac{-0,5 \pm \sqrt{12,25}}{2} \wedge t \neq -2$

$(=)\ t = \frac{3}{2} \wedge t = -2 \wedge t \neq -2$

$(=)\ t = \frac{3}{2}$

Figura 22. Resolução do grupo G3 à alínea b) da tarefa 2.

Justificação

As alíneas a) e b) da tarefa 2 eram diretas e de puro cálculo matemático. No entanto a alínea c) (figura 23) exigia uma interpretação do enunciado e do respetivo gráfico, assim como uma justificação na resposta final.

c) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, indica o ano e o mês em que o clube atinge as 300 inscrições. Na tua resposta apresenta um esboço do gráfico e indica o(s) ponto(s) relevante(s).

Figura 23. Alínea c) da tarefa 2.

Apesar de todos os grupos terem conseguido resolver positivamente esta questão, apenas um grupo justificou a sua escolha, para o mês e ano.

$t = 1,5$ logo, é um ano e 6 meses (1 ano e meio)
Se iniciou em Setembro de 2012, terá 250 inscritos em Março de 2014

Figura 24. Resolução do grupo G3 à alínea c) da tarefa 2.

Interpretação

A novidade desta tarefa presidia na alínea b), quando era solicitado aos alunos a resolução da equação fracionária, sendo este o novo conteúdo. Ao percorrer a sala de aula, a professora detetou que, quase todos os grupos se encontravam com dificuldades a interpretar esta questão. Perante tal situação, a opção da professora dirigiu-se a toda a turma e esclareceu as dúvidas interpretativas que existiam. De seguida apresenta-se um pequeno diálogo que resultou de tal esclarecimento.

Aluno A1 – Professora, o que é que fica no $Q(x)$?
Professora – Já fizeste essa questão aos teus colegas de grupo?
Aluno A3 – Oh professora, aquele zero aparece ali como?
Professora – Eu estou a ver que a tua colega já está a responder, mas antes de responderem, todos os elementos do grupo têm de estar a acompanhar a resolução, senão não é um grupo de trabalho, certo?
Aluno A7 – É preciso colocar tudo com o mesmo denominador, não é?
(A professora dirige-se ao quadro)
Professora – Vamos lá esclarecer algumas dúvidas! Qual é o primeiro passo?
Aluno A8 – Igualar a função a 2,5.
Professora – Ok. E depois?
Aluno A24 – Colocamos tudo com o mesmo denominador.
Aluno A3 – Ah! Por isso é que fica zero...
Professora – Então, agora, cada grupo continua a simplificar a equação.
(Passado alguns minutos)
Professora – Agora que todos simplificaram a fração, o que diz na sugestão para fazer?
Aluno A24 – Igualar o numerador a zero e o denominador diferente de zero.
Professora – Entendido? Alguma dúvida?

As dúvidas apresentadas pelos alunos podem ter surgido da interpretação da leitura do enunciado do problema, ou por outro lado, na própria resolução da equação, isto é, dificuldades em cálculos matemáticos ainda não interiorizados.

3.5. Tarefa 3

A tarefa 3 (Anexo 6) é em tudo semelhante à tarefa 2, visto que, esta tarefa foi realizada com o intuito dos alunos aprenderem a identificar e resolver inequações fracionárias. A classificação dada a esta tarefa é igualmente de problema, pelas mesmas razões apresentadas na tarefa 2.

A metodologia aplicada relativamente aos grupos de trabalho foi a mesma, e o recurso à calculadora gráfica foi nas mesmas condições que na tarefa 2. De qualquer forma, estas tarefas foram avaliadas separadamente, pois a análise efetuada poderia não ser da mesma natureza.

A tarefa 3 é semelhante à tarefa 2 na sua estrutura, sendo que a alínea a) da tarefa 3, foi igualmente formulada para que existisse uma sequência lógica em torno do problema, sem que o novo conteúdo a abordar fosse único e isolado.

a) Se uma equipa concluir com sucesso cinco atividades, qual é o prémio que vai receber?

Figura 25. Alínea a) da tarefa 3.

Linguagem matemática

A alínea b) (figura 26), por sua vez, englobava os novos conteúdos, onde mais uma vez foram fornecidas etapas para que os alunos compreendessem o processo de resolução de inequações fracionárias.

b) Quantas atividades têm que ser realizadas com sucesso para uma equipa conseguir um prémio superior a 8€.

Sugestão:

1. Começa por escrever a inequação na forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$.
2. Indica os zeros do numerador e do denominador.
3. De seguida completa a seguinte tabela:

x	$-\infty$	-1		0		9	$+\infty$
x^2-8x-9		0				0	
x				0			
$\frac{x^2-8x-9}{x}$		0		$S.S.$		0	

Figura 26. Alínea b) da tarefa 3.

Esta questão em particular acarreta várias etapas de desenvolvimento, já que, além de exigir uma resolução tipicamente matemática, engloba uma série de conteúdos lecionados de anos letivos anteriores, como por exemplo, o cálculo dos zeros e o quadro de sinais.

Na realização desta questão a linguagem utilizada foi, essencialmente, a linguagem simbólica com particular predominância de designações matemática. Pode-se igualmente referir a resolução de inequações pretendida nesta alínea, era a aplicação do algoritmo mencionado na sugestão da tarefa.

Quanto às dificuldades dos alunos, estas foram várias nomeadamente na utilização do símbolo de menor, na redução de toda a inequação ao mesmo denominador, no preenchimento da tabela de sinais e na apresentação do resultado final. Alguns alunos recorreram à representação icónica aquando o preenchimento da tabela de sinais, como forma de visualizarem a secção positiva e negativa de cada gráfico.

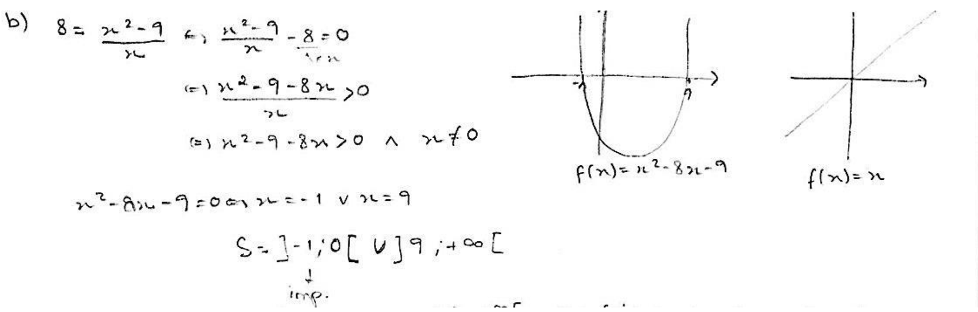


Figura 27. Resolução do grupo G4 à alínea b) da tarefa 3.

Justificação

As justificações relativas às alíneas b) e c) eram um pouco mais complexas, do que aparentavam ser. De acordo com os dados do problema, a solução final precisava de ser refletida e enquadrada. Pode-se referir que nenhum dos grupos apresentou a justificação completa em cada uma destas alíneas.

No caso da alínea b), pretendia-se que os alunos justificassem a escolha do número de atividades, entre dez a vinte atividades inclusive, tendo em conta o contexto do problema. As respostas obtidas pelos grupos foram: i) os grupos G1, G2 e G3 não responderam à questão; ii) o grupo G4 apresenta a resposta em forma de intervalo de números reais, não enquadrando a solução no contexto do problema; iii) o grupo G5 apenas refere que o número de atividades tem de ser superior a nove, não salientando que o máximo de atividades são vinte; iv) o grupo G6 refere que o número de atividades é exatamente nove. Verifica-se assim que existem dificuldades por parte dos alunos na interpretação do problema e posterior conclusão e justificação.

Relativamente à alínea c) (figura 28) o objetivo era que os grupos apresentassem um gráfico que refletisse a interseção entre a função e os 6€, para que posteriormente determinassem o número de atividades possíveis de realizar neste caso.

c) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina quantas atividades têm de ser realizadas de modo que o prémio seja inferior ou igual a 6€?

Figura 28. Alínea c) da tarefa 3.

Na análise desta questão, o panorama repetiu-se, todos os grupos apresentaram diferentes justificações, apenas o grupo G5 se aproximou da resposta mais viável. De qualquer forma é de evidenciar, mais uma vez, o esforço dos alunos na tentativa de justificar as suas opções (figura 29).

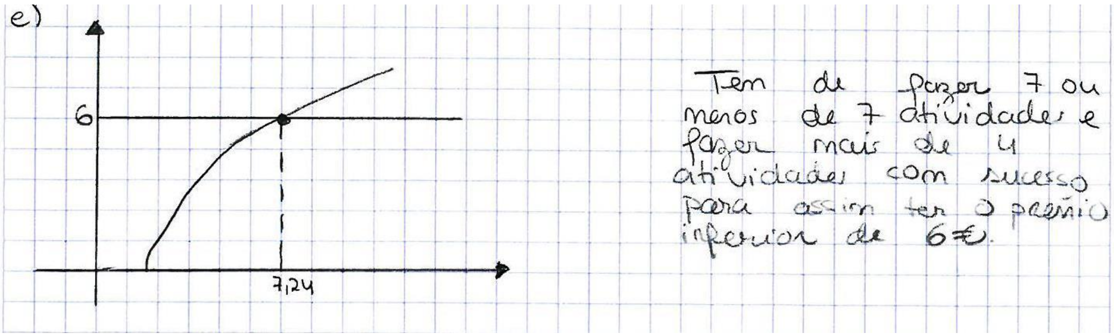


Figura 29. Resolução do grupo G5 à alínea c) da tarefa 3.

Interpretação

Como já foi referido na justificação dos procedimentos relativos à alínea b), a interpretação dos alunos no contexto do problema foi dificultosa, pois não conseguiram alcançar a solução real.

Na alínea c) a interpretação revelou-se também difícil para os alunos, já que, demonstraram dificuldades em interpretar quantas atividades tinham de ser realizadas "no máximo". Mais uma vez as respostas foram variadas: i) o grupo G1 não responde; ii) o grupo G2 refere que o número de atividades deve ser pelo menos sete; ii) os grupos G3 e G4 referem que o número de atividades deve ser aproximadamente sete; iii) o grupo G6 responde que devem ser realizadas sete ou menos atividades. A melhor aproximação à resposta real apresenta-se na figura 29.

Dada a diversidade de respostas por parte dos alunos, constata-se que, apesar dos alunos conseguirem, em geral, resolver inequações fracionárias, a sua interpretação no contexto do problema, tornou-se, para os alunos, a fase mais complexa desta tarefa.

3.6. Teste intermédio

A recolha de uma questão do teste intermédio teve como objetivo analisar o desempenho dos alunos, quanto à sua capacidade de comunicação matemática escrita, algumas aulas após se ter iniciado o plano de intervenção. Nesta fase, os alunos compreendiam mais determinadamente, que a escrita é fundamental no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Apenas se selecionou uma questão do teste intermédio, dado que, a escolha de um grupo completo seria algo muito trabalhoso, não deixando possibilidade de analisar questões de diferente natureza, no presente estudo.

O critério de seleção para a escolha da questão a analisar, relacionou-se com os conteúdos abordados durante a intervenção pedagógica, quer isto dizer que, como se desenvolveram tarefas que abordaram as funções racionais, transformações, equações e inequações fracionárias, fez todo o sentido analisar a questão do teste intermédio que incluísse parte destes conteúdos.

Assim sendo, a questão analisada corresponde à 1.2.1 do teste intermédio (Anexo 7), cuja realização procedeu-se individualmente, tendo sido mais um momento de avaliação para os alunos desta turma, e mais um momento de análise para este estudo.

A questão selecionada é de carater objetivo, tendo já sido abordada detalhadamente nas aulas de matemática anteriores à realização do teste intermédio.

1.2. Admita agora que a função f é definida pela expressão $f(x) = \frac{6-x}{x-2}$.

1.2.1. Resolva analiticamente a condição $f(x) \leq \frac{4-x}{x+2}$.

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

Figura 30. Questão 1.2.1. do teste intermédio.

Linguagem matemática

A questão 1.2.1. (figura 30) é especificamente matemática, quer isto dizer que, a resolução é a aplicação do algoritmo de inequações fracionárias, tendo os alunos que recorrer obrigatoriamente à representação simbólica da matemática. Como auxílio para completar o quadro de sinais, alguns alunos recorreram à representação icónica, de forma a visualizarem os gráficos correspondentes a cada uma das expressões obtidas na inequação fracionária (expressão do numerador e do denominador).

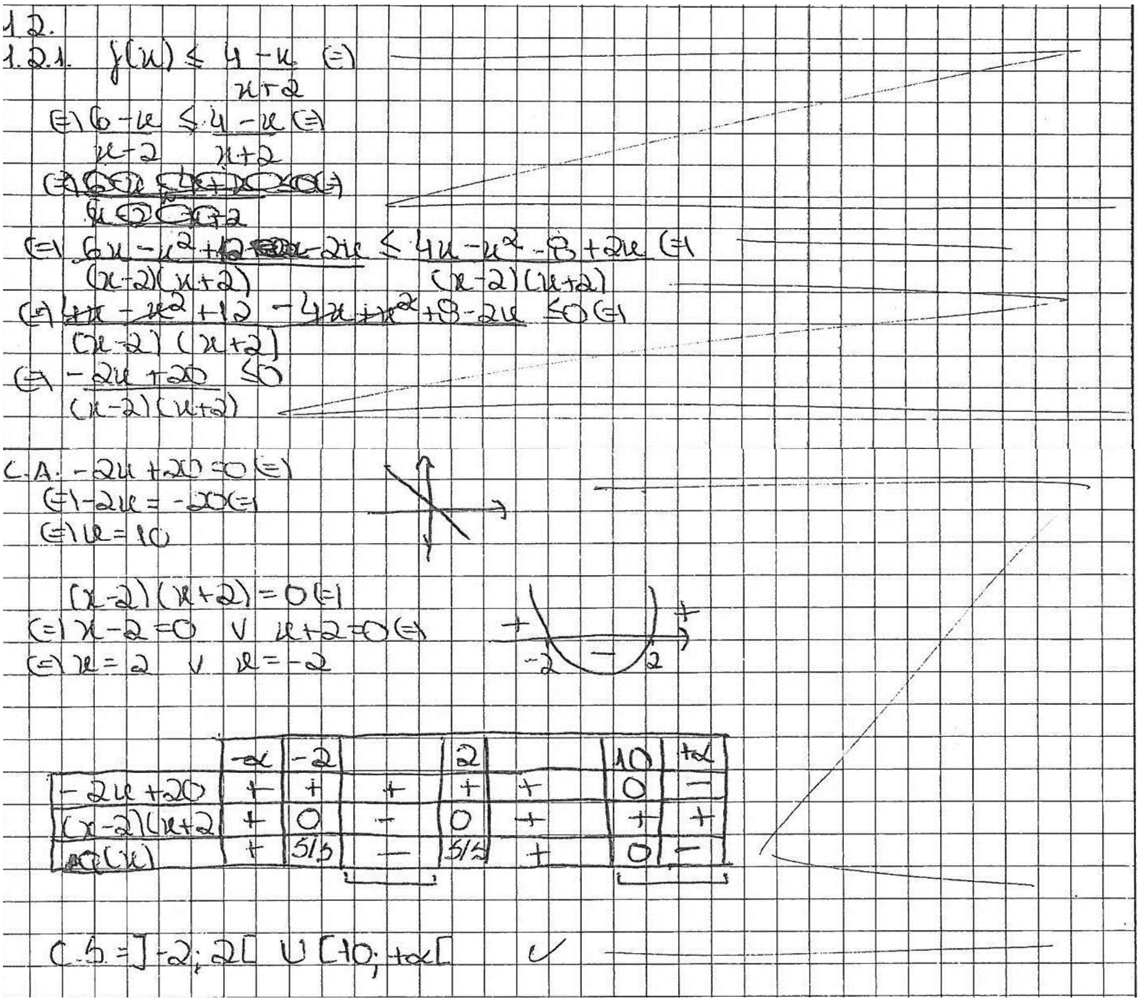


Figura 31. Resolução do aluno A1 à questão do teste intermédio.

É igualmente de evidenciar que, maioritariamente, os alunos continuavam a apresentar dificuldades na resolução de inequações, nomeadamente, na colocação de todos os termos no primeiro membro e na redução de termos ao mesmo denominador. A propriedade distributiva acompanhada do produto de números relativos, e a simplificação da própria inequação são os casos em que os alunos cometeram mais erros.

Justificação

Dado que esta questão é de cálculo imediato, sem ser necessário refletir arduamente sobre o que é pedido, quanto à justificação dos procedimentos, esperava-se que os alunos apresentassem uma representação icónica (gráficos) de forma a percecionar como é que cada aluno selecionou os sinais que foram colocados na tabela de sinais. Sabe-se que não é exigido ao aluno esta representação gráfica, pelo que ele pode tê-lo feito na folha de rascunho. Contudo é de assinalar quem o fez, tal como o aluno A1 (figura 31).

A solução final é igualmente uma justificação. A solução que procuram corresponde ao quociente positivo ou negativo? O intervalo que selecionaram é aberto ou fechado? Em que circunstâncias? Novamente verificou-se algumas dificuldades por parte dos alunos em encontrar respostas às questões propostas. Na figura 32 constata-se esta situação.

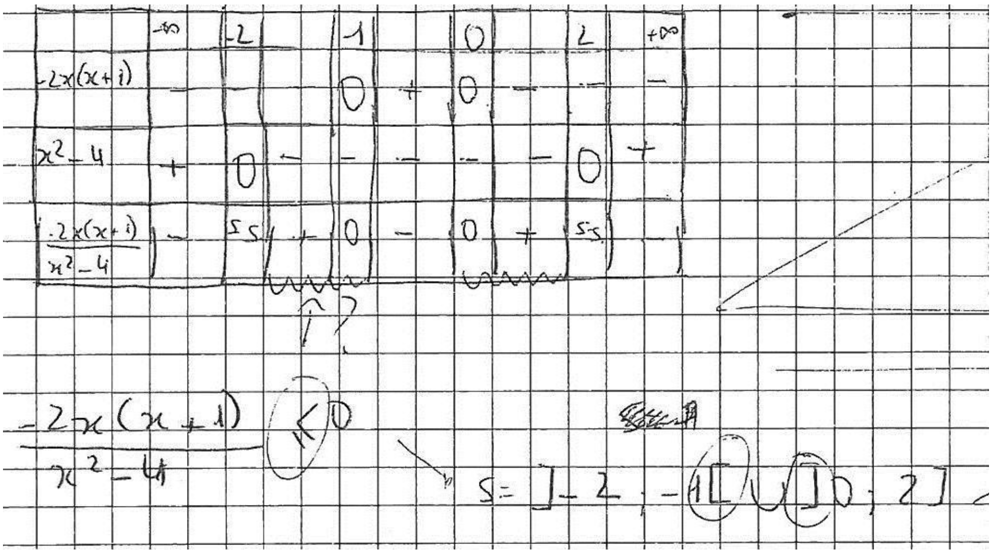


Figura 32. Resolução do aluno A3 à questão do teste intermédio.

O aluno A3 selecionou a solução positiva ao invés da negativa, tal como representou na inequação. Mais ainda, não teve em conta que o -1 e 0 eram valores que pertenciam ao domínio da inequação, logo esses valores deveriam estar incluídos no intervalo ("fechados").

Interpretação

Ao nível da interpretação, como já foi referido anteriormente, a dificuldade centrou-se junto do conjunto solução da inequação fracionária. É de salientar que apesar de todas as dificuldades no cálculo matemático, todos os alunos conseguiram entender o que se pretendia com esta questão, tendo substituído corretamente a expressão f na inequação.

As dificuldades apresentadas por alguns alunos, por exemplo pelo aluno A3 (figura 32), estão diretamente relacionadas com a interpretação do quadro de sinais. Denota-se que alguns alunos não compreendem que a parte superior do quadro de sinais representa uma reta real, cujos valores são os zeros de cada uma das expressões, do numerador e do denominador. Ao escolherem o intervalo representante do conjunto solução, alguns alunos apresentam igualmente dificuldades na leitura do sinal de menor ou igual da inequação. Detetou-se que um maior número de alunos têm dificuldades em compreender que a solução final que se procura representa todos os valores inferiores ou iguais ao quociente que simplificaram.

Muitas vezes a resolução de inequações passa por ser a aplicação de um algoritmo, sem que os alunos compreendam o porquê de tal resolução.

3.7. Tarefa 4

A Tarefa 4 (Anexo 8) corresponde ao último elemento recolhido e analisado. Esta tarefa foi desenvolvida com o intuito dos alunos compreenderem o conceito de função inversa. Nesta tarefa tentou-se, ao máximo, que fossem os próprios alunos a responder às etapas propostas e, no final, a debaterem acerca dos resultados que obtiveram.

Mais uma vez, optou-se pela realização do trabalho em grupos de quatro elementos, com recurso ao computador, para consulta de dados, e com recurso à calculadora gráfica, para apresentação e discussão de resultados. Para esta tarefa a tecnologia não foi diretamente útil para os alunos responderem às questões, mas foi fundamental para compararem os resultados entre grupos, e para refletirem sobre o produto final.

Linguagem matemática

Nesta tarefa as próprias etapas propostas aos alunos, exigiam que eles utilizassem a representação icónica, nomeadamente gráficos e tabelas. É evidente que na resolução de uma etapa é sempre necessário recorrer à representação simbólica, quanto mais não seja, à linguagem corrente.

Na resolução de uma das etapas, verificou-se o uso de um tipo de representação, que até então não tinha sido utilizado pelos alunos. A etapa em questão é a seguinte:

Etapa 4 – Para finalizar, o grupo deve encontrar a expressão analítica do gráfico que elaborou. Se efetuarem arredondamentos, utilizem duas casas decimais.

Figura 33. Etapa 4 da tarefa 4.

Quando esta etapa foi elaborada, o objetivo era que os alunos construíssem a equação da reta, analiticamente. Como tinham recolhido vários pontos, facilmente calculavam o valor do declive da reta e da ordenada na origem. No entanto, não foi o que aconteceu. Autonomamente, os alunos utilizaram a calculadora gráfica, mais concretamente a reta de regressão linear e obtiveram uma aproximação para a equação da reta que construíram.

Neste contexto, considera-se que a representação à qual os alunos se socorreram é uma representação ativa, isto é, cada grupo introduziu os seus valores e simulou/experimentou obter a equação da reta que tinham construído no papel.

Justificação

Os alunos começaram por registar os valores relativos às cidades que selecionaram. Construíram a tabela e o gráfico com suporte nesses dados. Estas informações foram utilizadas como suporte para a justificação.

Na etapa 4, como referido no tópico anterior, esperava-se que os alunos construíssem analiticamente a equação da reta. Como decidiram recorrer à calculadora gráfica, apresentaram-na diretamente, deixando de parte todos os procedimentos que os levaram até ela. Não foi relevante insistir com os alunos que apresentassem a equação da reta analiticamente, já que não era objetivo principal desta tarefa. O objetivo era, sim, obter uma equação da reta para posteriormente comparar com as retas dos outros grupos e compreenderem o conceito de função inversa.

Interpretação

Na tarefa 4 a interpretação de cada uma das etapas, por parte dos alunos foi razoável. Ao terminarem todas as etapas da tarefa os alunos não estavam a compreender qual ou quais as conclusões a referir.

Ao finalizar a tarefa, dois elementos de dois grupos diferentes foram ao quadro apresentar o que tinham desenvolvido em grupo. Inicialmente, os grupos estavam receosos, porque pensavam que se iria expor uma resolução correta e outra incorreta. Contudo, quando as colegas apresentaram as retas obtidas na projeção da calculadora gráfica, rapidamente começaram a entender que ambas as resoluções estavam corretas e que as retas se sobrepunham através da bissetriz dos quadrantes ímpares.

A representação gráfica do grupo G2 encontra-se na figura 34 e a do grupo G5 encontra-se na figura 35.

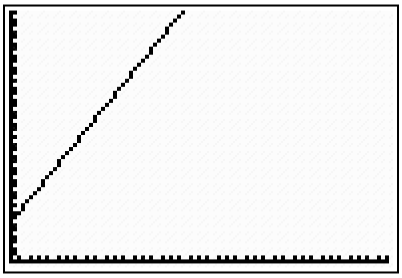


Figura 34. Representação gráfica do grupo G2.

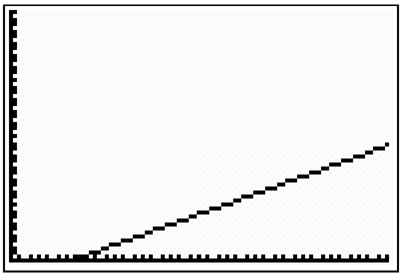


Figura 35. Representação gráfica do grupo G5.

De seguida apresenta-se um pequeno diálogo decorrido na aula durante a apresentação e discussão da tarefa.

> Aluna A7 – Oh professora não me vai pôr a fazer uma resolução errada no quadro, pois não?
> Professora – Vai lá apresentar. Confia em mim!
> (Cada uma das alunas apresentou os dados recolhidos, a equação da reta e a representação gráfica apresentada nas figuras 34 e 35).
> Professora – Então turma, o que acham? Alguma das resoluções está incorreta? Estão ambas certas?
> Aluno A24 - Estão as duas certas. Uma reta está em função de x e outra em função de y.
> Professora – Concordam com o que disse o aluno A24?
> Aluno A8 – Sim. E até parece que aquela reta que passa na origem está a dividi-las ao meio.
> Professora – Que reta é a que o aluno A8 está a falar?
> Aluno A24 – A bissetriz dos quadrantes ímpares. Então isso quer dizer que uma reta é inversa da outra?
> Professora – Ouviram a pergunta do aluno A24? O que acham?
> Aluno A13 – Sim é verdade, porque os valores de x numa reta são os valores de y na outra reta.

Enquanto decorria este diálogo as duas alunas que se encontravam no quadro, introduziam as equações das retas, produzidas em grupo, no mesmo menu de visualização, de forma a compararem os resultados obtidos. Na figura 36 apresenta-se tal visualização, incluindo a bissetriz dos quadrantes ímpares, que os alunos mencionaram.

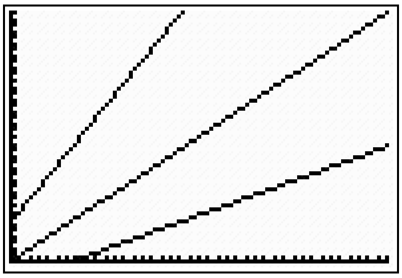


Figura 36. Representação gráfica da resolução final apresentada e discutida em turma.

Para finalizar, é de referir, que após a leitura integral deste capítulo, verifica-se que existe uma progressiva evolução dos alunos na realização de tarefas, em diferentes aspetos. Primeiro, a nível do trabalho desenvolvido entre alunos, que denota-se ser mais colaborativo, assim como, a nível da escrita que tende a ser mais completa, quer recorrendo à linguagem simbólica e/ou à linguagem corrente.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES, IMPLICAÇÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES

Este capítulo encontra-se seccionado em três partes, a primeira relativa às conclusões deste estudo, a segunda remete para as implicações para o ensino e aprendizagem da matemática, e a última refere-se às recomendações e limitações deste projeto.

4.1. Conclusões

Neste subcapítulo apresentam-se os resultados relevantes obtidos neste estudo, segundo os objetivos inicialmente estabelecidos, isto é, como é que os alunos utilizam a linguagem matemática, como justificam os seus procedimentos e como interpretam um texto ou um procedimento escrito. Estes resultados discutem-se à luz da literatura explorada no enquadramento contextual e teórico.

4.1.1. Objetivo 1 – Como utilizam os alunos de uma turma do 11.º ano a linguagem matemática nas produções escritas?

Da análise efetuada às produções escritas dos alunos, verificou-se que as representações, preferencialmente, usadas pelos alunos eram as simbólicas e icónicas. As representações simbólicas eram utilizadas pelos alunos, sempre que possível, ao nível da linguagem corrente. Apenas recorriam ao vocabulário específico da matemática em situações, que lhes era impossível recorrer à linguagem corrente, como por exemplo, na resolução de equações e inequações, ou seja, na aplicação direta de um algoritmo.

No que concerne às representações icónicas, estas foram usadas pelos alunos, mas em menor quantidade do que aquilo que se espectava. Desde o 1.º ciclo, os alunos são incentivados a utilizar o dito "rascunho", onde fazem desenhos, diagramas, tabelas, gráficos, esquemas, entre outros elementos, que os ajudam a desenredar o enunciado da tarefa. Assim, a representação icónica aparece como auxílio para deslindar o enunciado da tarefa, porém a resposta principal é dada através do uso da representação simbólica.

Pinto e Canavarro (2012) referem no estudo que desenvolveram que os alunos utilizam, preferencialmente a linguagem simbólica da matemática e recorrem às representações icónicas como auxílio na resolução de tarefas. O presente trabalho confirma os dados apresentados por estes autores, apesar dos estudos terem sido realizados com alunos de diferentes anos de escolaridade.

É igualmente de salientar que sendo as representações preferenciais dos alunos as simbólicas, recorrendo à explanação através da linguagem corrente, constatou-se que a linguagem utilizada era corrente, isto é, a simples oralidade que passa para a escrita.

Pode-se não compreender a importância da nossa língua no ensino e aprendizagem da matemática, mas se não existir um envolvimento entre ambas, podem-se criar barreiras na aprendizagem da matemática. As dificuldades na leitura e interpretação foram verificadas ao longo deste trabalho, e nesta temática o NCTM (1994) faz referência à importância do professor para explicar determinado vocabulário ou sintaxe, necessário à compreensão da matemática. As dificuldades na leitura e interpretação foram igualmente verificadas no estudo desenvolvido por Ponte e Quaresma (2011).

No que concerne à representação ativa, foi uma revelação positiva, pois verificou-se que, autonomamente, os alunos recorreram à experimentação/simulação sem necessitar do auxílio da professora. Neste caso, constatou-se que deviam ter sido dadas mais oportunidades aos alunos para demonstrarem as suas capacidades quanto ao uso deste tipo de representação.

A linguagem matemática escrita, em todos os seus formatos de representação, é uma forma de comunicação no ensino e aprendizagem da matemática. A escrever e a falar sobre a matemática, os alunos desenvolvem o seu poder de comunicar matematicamente. O questionamento do professor que leva o aluno a refletir, a justificar ideias, a explicar raciocínios, o qual é fundamental para desenvolver a comunicação matemática. Estas ideias adquiridas ao longo da intervenção pedagógica estão de acordo com resultados obtidos em estudos anteriores, nomeadamente, Ponte et al. (2007) e Martinho e Ponte (2005b).

Tal como se constatou ao longo desta intervenção, os alunos foram aprendendo a desenvolver e/ou consolidar a linguagem escrita, através do seu uso, tal como concluíram Pinto e Canavarro (2012) no estudo que desenvolveram.

4.1.2. Objetivo 2 – Como justificam os alunos de uma turma do 11.º ano os seus procedimentos escritos?

A justificação dos procedimentos escritos, por parte dos alunos apresentou-se sob diferentes formas. Primeiramente denotou-se que os alunos preferiam não justificar os seus procedimentos, a menos que, lhe fosse expressamente solicitado. O facto de não justificarem os seus procedimentos escritos complica o processo de correção/avaliação do professor que não compreende o raciocínio demonstrado pelo aluno. Esta questão de investigação centrava-se na forma como os alunos justificavam os seus procedimentos, porém, esta análise passou um pouco pela verificação da justificação dos alunos, ou não, nas questões analisadas.

Em segundo lugar, após ter-se detetado as dificuldades dos alunos em justificar procedimentos, incentivou-se os alunos, ao longo das aulas, à justificação das suas escolhas, mesmo que na questão não fosse aplicada a palavra *justifique*.

Na ficha de avaliação 1, maioritariamente os alunos não justificaram a escolha do vetor e do ponto para a formação da equação do plano. Foi-lhes transmitido, que apesar da questão não solicitar integralmente a justificação, é importante que apresentem os seus raciocínios e que explicitem as suas escolhas.

No trabalho de Monteiro e Santos (2011), a professora Rita foi desenvolvendo as suas próprias convicções sobre a justificação em matemática ao longo da sua intervenção. Neste estudo, sempre se apostou no desenvolvimento da justificação dos alunos, desde o primeiro momento, quer por escrito, quer oralmente.

Pode-se tomar igualmente como exemplo, o caso da tarefa 1, em que foi proposto aos alunos uma investigação, onde era necessário que registassem todos os processos que desenvolveram. Aqui verificou-se algumas dificuldades por parte dos alunos, em explorar diferentes casos, e em expressar as conclusões a que chegaram. É de salientar, que os alunos, em sua maioria, têm tendência em sintetizar ideias, para escrever em menor quantidade.

Quando se analisou a ficha de avaliação 2, denotou-se uma melhoria significativa no tipo de justificação dada pelos alunos. Neste caso, vários alunos conseguiram redigir uma justificação completa, explicitando o tipo de transformações efetuadas e consequentemente, as novas assíntotas obtidas. Apesar, de em alguns casos, a justificação não estar totalmente correta ao nível dos conteúdos matemáticos, verifica-se que os alunos têm mais confiança nos seus próprios raciocínios matemáticos.

4.1.3. Objetivo 3 – Como interpretam os alunos de uma turma do 11.º ano um texto ou procedimento escrito?

Da primeira reflexão da interpretação dos alunos acerca de um texto ou de um procedimento escrito, é que os alunos interpretam com dificuldades. Alguns dos elementos analisados, não acarretavam uma necessidade interpretativa de grau elevado. Contudo, três dos elementos analisados evidenciaram as dificuldades dos alunos. O primeiro elemento corresponde à ficha de avaliação 1, isto é, a recolha diagnóstica, na qual os conteúdos matemáticos são do tema geometria. Na análise desta questão verificou-se uma acentuada dificuldade dos alunos interpretarem, não o que lhes era pedido, mas principalmente a interpretação geométrica da figura, de forma a encontrarem o vetor e o ponto necessário à resolução da tarefa.

As tarefas nas quais possuíam uma questão objetiva, não suscitaram dúvidas aos alunos. No entanto, quando lhes era solicitado, por exemplo, a resolução de uma equação ou inequação fracionária com recurso à calculadora gráfica, e posterior análise do gráfico obtido, as dificuldades eram evidentes. Os alunos têm realmente dificuldades na interpretação de determinada solução no contexto da tarefa.

Em relação a esta interpretação poderão existir duas situações que expliquem tais dificuldades. A primeira relaciona-se com a leitura do enunciado da tarefa. Como já foi referido anteriormente, uma leitura está diretamente relacionada com a interpretação. A leitura deve ser feita calmamente e mais do que uma vez, para evitar a interpretação errónea do que é pedido. Esta situação já foi evidenciada em estudos anteriores, tais como, Menezes (1996) e Ponte e Quaresma (2011).

A segunda situação que poderá ter levado os alunos às dificuldades interpretativas, prende-se com a própria linguagem corrente. Verificou-se que existe confusão entre palavras, do tipo, "pelo menos", "no máximo" e "até". Se os alunos demonstraram dificuldades em manipular tais palavras, obviamente, também tiveram complicações em encontrar a solução, no contexto da tarefa. Um estudo que constata esta situação é o de Costa (2007) que refere que a resolução de problemas e as *tarefas de investigação* estão dependentes da relação entre a linguagem corrente e a matemática, da qual depende aprendizagem significativa dos alunos.

4.2. Implicações para o ensino e aprendizagem

Deste estudo sobressaíram algumas implicações para o ensino e aprendizagem da matemática. A primeira delas relaciona-se com o tema deste relatório de estágio, a comunicação matemática. Para que haja comunicação matemática no ensino e aprendizagem da mesma, esta deve comtemplar, o trabalho de grupo, tarefas exploratórias e de investigação, resolução de problemas e principalmente, é fundamental dar tempo e oportunidade aos alunos de conversarem e discutirem matematicamente entre si, tal como vem salientado nos documentos curriculares: NCTM (1994) e ME (2002).

Segundo Ponte et al. (2007) é ao escrever e a falar sobre matemática, em conjunto com os colegas e o professor, a expressar pensamentos, a argumentar e discutir ideias, que os alunos desenvolvem a sua capacidade matemática. Ao longo da intervenção pedagógica, e em todos os momentos em sala de aula, tentou-se sempre que possível, ajustar todas estas situações ao contexto aula-turma. Progressivamente, os alunos foram incentivados a trabalhar em grupo, a discutir ideias, a conjeturar e argumentar, a apresentar os seus resultados, a refutar e a justificar. Pode-se dizer que a última aula da intervenção pedagógica (aula da função inversa), foi estruturada de forma a ser possível aos alunos, construírem todas as fases de uma aula repleta de comunicação matemática. Nesta aula, sentiu-se o auge da comunicação matemática.

A segunda implicação considerada no ensino e aprendizagem da matemática relaciona-se com o trabalho de grupo. Aquando a iniciação da intervenção pedagógica não existia recetividade por parte da professora estagiária, relativamente ao trabalho de grupo. Inicialmente optou-se pela realização de atividades em díades, para que não existissem alterações na sala de aula e para que os alunos não se dispersassem com situações adversas. No entanto, com o decorrer das aulas, a professora supervisora incentivou a estagiária, sempre, na perspetiva do trabalho de grupo, apesar da professora estagiária não encontrar motivação para tal.

Na primeira experiência de trabalho de grupo, a aula decorreu com mais ruído do que o habitual e foi mais difícil motivar os alunos para a aula. Contudo, nas aulas seguintes os alunos empenharam-se e já se demonstraram aptos a tal método. O trabalho de grupo, nesta turma resultou muito bem, as perspetivas da professora estagiária foram superadas e as crenças de que o trabalho de grupo é complicado foram ultrapassadas.

Tal como refere o NCTM (1994), Oliveira, Segurado & Ponte (1998) e ME (2002) o trabalho de grupo é uma ótima forma dos alunos partilharem ideias entre si, aprenderem a fazer investigações, formular conjeturas, testá-las, validá-las, estabelecerem conexões, entre outros, tendo-se verificado uma evolução destas partilhas nesta intervenção pedagógica.

Um elemento recolhido para análise da comunicação matemática escrita dos alunos foi o teste intermédio. Este elemento é relativamente especial, pelo facto do tema deste estudo tentar refletir a evolução da comunicação escrita dos alunos, neste elemento de avaliação. No entanto, tal situação não teve grande impacto, já que, a questão analisada do teste intermédio relativa aos conteúdos abordados pela professora estagiária nas aulas, era a aplicação de um algoritmo, que não exigia um raciocínio elevado, pelo que o teste intermédio tornou-se mais um elemento de análise e não, propriamente, um elemento refletor de aprendizagem.

A última implicação a referir prende-se com as tarefas. Tal como nos estudos de Oliveira, Segurado e Ponte (1998) e Ponte (2005), neste estudo também se recorreu às tarefas de investigação por ser as que mais se adequam ao trabalho de grupo, e os problemas devido ao seu grau de desafio mais elevado.

Pensa-se que a escolha das tarefas foi bem conseguida, porém a realização das tarefas em díades seriam mais proveitosas em grupo, já que existe mais possibilidade dos alunos comunicarem entre si, debaterem e apresentarem conclusões. Em díades, se um dos alunos apresentar mais dificuldade à disciplina de matemática, a comunicação matemática entre eles poderá ficar comprometida. Salienta-se que no final do ano letivo, foram os próprios alunos da turma a mencionar que aprenderam mais, desde que começaram a trabalhar em grupo.

Assim, tenciona-se em futuras aulas de matemática, continuar a aplicar tarefas de investigação e problemas, desenvolvendo o trabalho com os alunos em grupo.

4.3. Recomendações e limitações

No que concerne às limitações deste trabalho, tem-se a referir duas situações. A primeira está relacionada com a necessidade de cumprir o programa previsto para o 11.º ano de escolaridade. Dado o número de aulas previstas para cada conteúdo, nem sempre foi possível realizar todas as atividades pretendidas. Realizaram-se aulas com recurso à tecnologia, aplicaram-se tarefas em díades e em grupo, realizaram-se apresentações e discussões de resultados, tendo sempre em conta o número de aulas disponíveis para cada conteúdo, e explorando da melhor forma possível, para contribuir para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita dos alunos.

A segunda situação a mencionar, está relacionada com um caso particular que aconteceu na turma onde se desenvolveu o estudo. Uma aluna esteve lesionada cerca de dois meses, período durante o qual, as aulas desta turma só poderiam decorrer nas salas do rés-do-chão ou então no bloco C da escola, onde existia elevador. Estas regras foram impostas pela escola, já que a aluna tinha dificuldades de mobilidade. Aparentemente esta situação não parecia influenciar este estudo, todavia as salas equipadas com computador e projetor, encontravam-se nos blocos sem elevadores, ou então em pisos superiores.

As aulas tinham de ser preparadas, contabilizadas de forma a prever o dia em que ia ser realizada, para reservar antecipadamente o projetor da escola, ou então, conversar com um professor que ocupasse uma sala equipada no rés-do-chão de forma a efetuar a troca, se possível. Esta situação agravou-se quando foi igualmente necessário utilizar a internet durante uma aula (na realização da tarefa 4). Neste caso, as salas com melhor cobertura de rede eram em pisos superiores, nos blocos sem elevador. Não foi possível frequentar qualquer uma destas salas, devido à aluna lesionada, pelo que, requisitou-se uma sala no rés-do-chão com a cobertura possível. Efetuou-se igualmente um plano B para a mesma aula, caso a internet não funcionasse. Felizmente, todos os equipamentos funcionaram corretamente na aula em questão.

Quando se começou a desenvolver este estudo, muitas eram as dúvidas de como se iriam processar as aulas, que tipo de tarefas se iriam aplicar e em que circunstâncias, pelo que, pensava-se que a comunicação matemática escrita, relacionava-se apenas com a escrita. No entanto, após este longo processo de estágio, compreende-se que a escrita não está isolada.

Quando se esquematizou as estratégias de investigação e avaliação da ação, apenas se decidiu analisar a comunicação escrita dos alunos, através de elementos escritos. Contudo, a professora estagiária verificou durante as aulas, quando se deslocava a cada díade ou grupo, que as conversas produzidas pelos alunos eram, em muito casos, aquilo que passavam para o papel. Algumas das falhas apresentadas, como por exemplo, a linguagem escrita pouco cuidada, advém da comunicação oral. Assim, é relevante em trabalhos futuros sobre a comunicação escrita, avaliar igualmente as discussões orais entre alunos, através de gravações áudio.

Outra situação que poderá ser reavaliada em trabalhos futuros é o grau de complexidade das questões propostas aos alunos. Quer isto dizer que, após os alunos trabalharem os novos conteúdos, podem ser propostas tarefas com um grau de desafio mais elevado, enquanto nesta intervenção pedagógica, isso verificou-se nas tarefas de introdução ao novo conteúdo, e não tanto, nas tarefas de consolidação de conteúdos. Nestas últimas optou-se diversas vezes por tarefas do manual, que são razoáveis, mas para trabalhar em grupo não são tão desafiantes/complexas. Assim sendo, propõe-se que em trabalhos futuros se desenvolvam tarefas de consolidação de conteúdos mais desafiantes, em grupo.

Pelo que foi dito e de acordo com as recomendações aqui apresentadas, pode-se sugerir um tema relevante para desenvolver em trabalhos futuros, *a comunicação matemática escrita na resolução de tarefas em grupo.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Leal, L., & Ponte, J. P. (1996). *Investigar para aprender matemática*. Lisboa: APM e CIEFCUL.

Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo.* Lisboa: APM e CIEFCUL.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Thèse d'état. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Bruner, J. S. (1999). *Para uma teoria da educação* [Trad. Manuela Vaz]. Lisboa: Relógio d'Água Editores.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Costa, A. M. (2007). *A importância da Língua Portuguesa na aprendizagem da Matemática*. Dissertação de Mestrado em Estudos da Criança - Área de Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

D'Ambrosio, B. S. (2008). A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático. In A. Souza, C. Nunes, E. Reis, E. Botta, I. Morais, M. Travassos, M. Ribeiro, N. Allevato, P. Hermínio, R. Araium, R. Brumatti, T. Puti & T. Pinto (Orgs.), *I Seminário em Resolução de Problemas*. Rio Claro: Unesp.

Dias, S., & Santos, L. (2010). O feedback e os diferentes tipos de tarefas matemáticas. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Orgs.), *Atas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 126-136). Aveiro: APM.

Domingos, A. (2005). Normas sociomatemáticas nas aulas do ensino superior. In J. Brocardo, F. Mendes & A. M. Boavida (Eds.), *Atas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 403-413). APM: Setúbal.

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupturecognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Grossmann, M. T., & Ponte, J. P. (2011). O sentido de símbolo de um aluno e a álgebra do 12.º ano. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 281-303). Póvoa de Varzim: EIEM.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005a). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In J. Brocardo, F. Mendes & A. M. Boavida (Eds.), *Atas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 273-293). Setúbal: APM.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005b). A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor. In H. Guimarães & L. Serrazina (Orgs.). *Atas do V CIBEM*. Porto: APM.

Medeiros, K. (2010). *A comunicação na formação inicial de professores de matemática: conceções e práticas de explicação na sala de aula.* Tese de Doutoramento em Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Menezes, L. (1996). A importância da pergunta do professor na aula de Matemática. In J. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina & C. Loureiro (Orgs), *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que Formação?* (pp. 105-116). Lisboa: Secção de Educação Matemática - Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Menezes, L. (2000). Matemática, Linguagem e Comunicação. *Millenium*, 20, 178-196.

ME (2002). *Programa de Matemática A* (11.º ano). Lisboa: Autor.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

Nunes, C. C., & Ponte, J. P. (2008). A gestão curricular em Matemática. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 619-627). Badajoz: SEIEM.

Oliveira, H., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. (1998). Tarefas de investigação em matemática: Histórias da sala de aula. In G. Cebola & M. Pinheiro (Eds.), *Desenvolvimento curricular em Matemática* (pp. 107-125). Lisboa: SEM-SPCE.

Pinto, E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães & A. Folque (Org.), *Prática de investigação em educação*. Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: um novo aspeto do método matemático*. Rio de janeiro: Editora Interciência.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L., & Oliveira H. (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20*(2), 39-74.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante, 20*(1), 55-81.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). As representações matemáticas nas conceções dos professores do 1.º ciclo do ensino básico: um estudo exploratório. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 177-194). Póvoa de Varzim: EIEM.

Passos, C. (2008). A comunicação nas aulas de matemática revelada nas narrativas escritas em diários reflexivos de futuros professores. *Interações*, *4*(8), 18-36.

Rosaen, C. (1989). Writing in the content areas: reaching its potential in the learning process. In J. Brophy, *Advances in research on teaching*, volume 1 (pp. 153-194). London: JaiPress.

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.), *Educação e matemática: Caminhos e encruzilhadas. Atas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 169-187). Lisboa: APM.

Sousa, F., Cebolo, V., Alves, B., & Mamede, E. (2009). Comunicação matemática: contributos do PFCM na reflexão das práticas de professores. *In atas profmat 2009*. Viana do Castelo: APM.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Referências Webliográficas

IGEC (2008). Relatório de avaliação externa. Consultado em novembro 19, 2012 em: http://www.ige.min-edu.pt/content_01.asp?BtreeID=03/01&treeID=03/01/03

Selas, L. (2008). *Comunicação escrita: relato de uma experiência implementada numa turma do 8ºano de escolaridade.* Consultado em Novembro 2, 2012, em http://www.apm.pt/files/_Co_Selas_487e553ed6f11.pdf.

ANEXOS

ANEXO 1

Pedido de Autorização ao Diretor da Escola

Exmo. Sr. Diretor do Agrupamento de Escolas ——————————

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário da Universidade do Minho, eu, Ana Videira, tendo em conta o Projeto de Intervenção Pedagógica Supervisionada (Estágio), sob o tema *A comunicação matemática escrita na resolução de tarefas e o seu efeito na concretização do teste intermédio: Um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade do curso de ciências e tecnologias* pretendo recolher materiais escritos dos alunos, nomeadamente, resoluções de tarefas por eles realizadas, como forma de análise para tal estudo.

No processo de análise destes dados, e na apresentação dos mesmos, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos da turma. Deste modo, venho solicitar a V. Exa. autorização para a recolha dos referidos dados.

Agradeço a sua atenção.

Com os mais respeitosos cumprimentos.

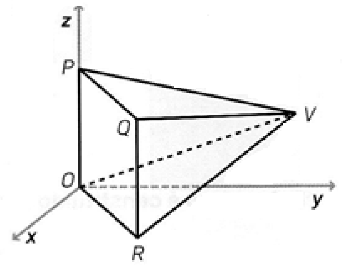
A Professora Orientadora	Autorização
______________________________	____ de _________ de 2013
(Sandra Regina Gonçalves Martins)	
A Professora Estagiária	O Diretor
______________________________	______________________________
(Ana Correia Videira)	(José Alfredo Mendes)

11 de Janeiro de 2013

ANEXO 2

Ficha de Avaliação 1

2. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n. Oxy, a pirâmide quadrangular regular [OPQRV].



Sabe-se que:

- O vértice P pertence ao eixo Oz;
- O vértice R pertence ao plano xOy;
- O plano PQV é definido pela equação $3x - 4y - 10z + 100 = 0$;
- A reta **r** que contém a altura da pirâmide é definida pela equação $(x, y, z) = (7, -1, 5) + k(3, -4, 0), k \epsilon IR$;

2.1 Define por uma condição cartesiana a reta que passa na origem do refencial e é paralela à reta **r**.

2.2 Determina a área da base da pirâmide.

2.3 Escreve a equação cartesiana do plano que contém a base da pirâmide.

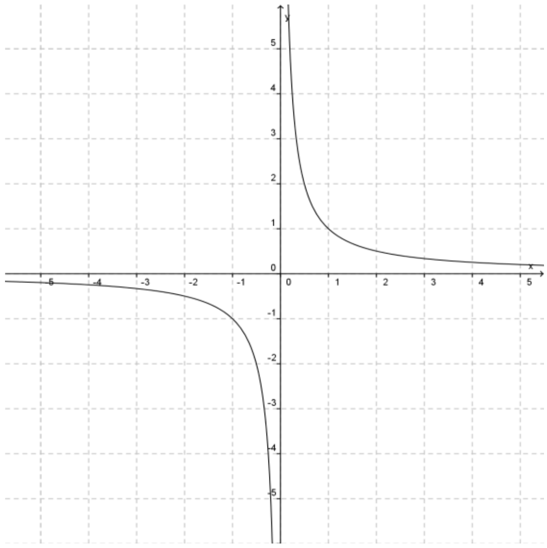
2.4 Determina as coodenadas do vértice da pirâmide (interseção da reta **r** com o plano PQV).

2.5 Determina uma equação vetorial da reta de interseção do plano PQV com o plano de equação $x + 2y = 10$.

ANEXO 3

Tarefa 1

Sabe-se que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é a função base da família de funções racionais e que o seu gráfico é:



Para cada uma das seguintes alíneas, utiliza a calculadora gráfica para analisares diferentes situações, segundo o que é indicado. Formula conjeturas, testa-as e generaliza-as.

a) Se considerarmos a função $f(x) = \frac{b}{x}$, sendo que $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, investiga o que acontece para diferentes valores de b.

b) Mantendo o valor de b constante, se à função f adicionarmos o parâmetro a, obtém-se a função $g(x) = a + \frac{b}{x}$. Conjetura acerca do que acontece à função g para diferentes valores de a.

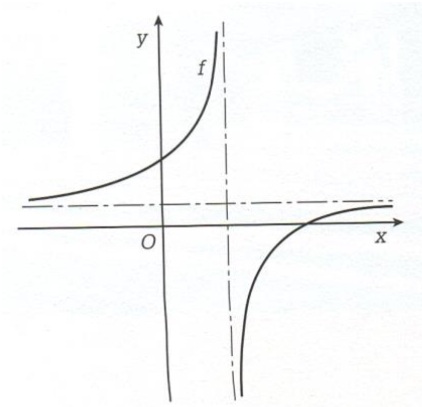
c) Mantendo os valores de a e b constantes, se a função g passar a ser do tipo $h(x) = a + \frac{b}{x+d}$, o que acontece para diferentes valores de d?

d) Tendo em conta as alíneas anteriores, que parâmetros a, b e d alteram o domínio, contradomínio e assíntotas (verticais e horizontais)?

ANEXO 4

Ficha de Avaliação 2

4. Na figura está representada, num referencial ortonormado Oxy, parte do gráfico de uma função f, assim como as duas assíntotas desse gráfico.



Sabe-se que:

- 6 é o único zero de f;
- as retas de equação $x = 3$ e $y = 1$ são as assíntotas do gráfico de f.

4.1 Indica o domínio e o contradomínio de$f$.

4.2 Define, por uma expressão analítica, a função f.

4.3 Seja $g(x) = f(x + 4) + 1$. Justifica como se pode obter uma representação gráfica da função g a partir da representação gráfica da função f e indica as assíntotas do gráfico de g.

ANEXO 5

Tarefa 2

No agrupamento de escolas ———— criou-se em Setembro de 2012 um clube de programação. Considera a função, $A(t)$, que representa o número de alunos inscritos no clube de programação, **em centenas**, dado em função do tempo, t (em anos). O clube está limitado aos 300 alunos.

$$A(t) = \frac{t^2 + 3t + 2}{t + 2}$$

a) Quando o clube iniciou, quantos alunos estavam inscritos?

b) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, indica o ano e o mês em que o clube terá 250 alunos inscritos.

Sugestão: Começa por escrever a equação na forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. De seguida resolve a equação aplicando $P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0$.

c) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, indica o ano e o mês em que o clube atinge as 300 inscrições. Na tua resposta apresenta um esboço do gráfico e indica o(s) ponto(s) relevante(s).

ANEXO 6

Tarefa 3

No *Dia da Escola*, o agrupamento de escolas ———— decidiu atribuir um prémio por equipa de acordo com o número de atividades concluídas com sucesso. Seja x o número de atividades realizadas por cada equipa e $P(x)$, o prémio, em euros, atribuído a cada equipa. Para a equipa ter direito a prémio tem de participar em pelo menos quatro atividades com sucesso, sendo que no total estão previstas 20 atividades.

$$P(x) = \frac{x^2 - 9}{x}$$

a) Se uma equipa concluir com sucesso cinco atividades, qual é o prémio que vai receber?

b) Quantas atividades têm que ser realizadas com sucesso para uma equipa conseguir um prémio superior a 8€.

Sugestão:

1. Começa por escrever a inequação na forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$.
2. Indica os zeros do numerador e do denominador.
3. De seguida completa a seguinte tabela:

x	$-\infty$	-1		0		9	$+\infty$
$x^2 - 8x - 9$		0				0	
x				0			
$\frac{x^2 - 8x - 9}{x}$		0		$S.S.$		0	

c) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina quantas atividades têm de ser realizadas de modo que o prémio seja inferior ou igual a 6€?

ANEXO 7

Teste Intermédio

Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. *xOy*, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

As retas de equações $x\ = 2$e $y\ = -1$ são as assíntotas do gráfico da função *f*.

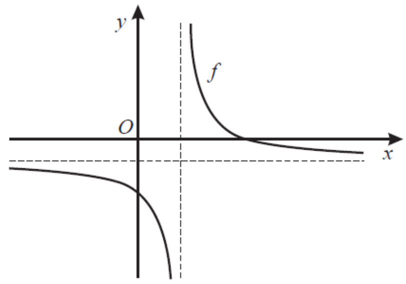


Figura 1

1.1. Responda aos dois itens seguintes sem apresentar cálculos.

1.1.1. Qual é o valor de *k* para o qual a equação $f(x)\ =\ k$é impossível?

1.1.2. Qual é o limite de $f(x)$quando x tende para $+\infty$?

1.2. Admita agora que a função f é definida pela expressão $f(x) = \frac{6-x}{x-2}$.

1.2.1. Resolva analiticamente a condição $f(x) \leq \frac{4-x}{x+2}$.

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

1.2.2. Seja ga função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^3$.

A equação $(fog)(x) = x$ tem exatamente duas soluções.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essas soluções.

Apresente as soluções arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar os pontos relevantes para responder à questão colocada.

ANEXO 8

Tarefa 4

De acordo com a meteorologia mundial, a temperatura de uma determinada cidade pode ser apresentada em graus Celsius e/ou graus Fahrenheit. Para a realização desta tarefa pretende-se que cada grupo concretize as seguintes etapas:

Etapa 1 – Recorrendo à informação presente no seguinte link http://wwis.ipma.pt/wmoRegions.jsp?regionID=6, devem selecionar cinco cidades à vossa escolha, e de seguida registar as temperaturas **mínimas**, relativas ao dia 8 de Março, em graus Celsius e em graus Fahrenheit.

Etapa 2 – Com os dados recolhidos na etapa 1, o grupo deve construir uma tabela que represente a correspondência entre as variáveis.

Etapa 3 – Com o auxílio da tabela, o grupo deve realizar uma representação gráfica que relacione a correspondência entre as temperaturas, assim como, deve indicar os pontos de interseção com os eixos coordenados.

Etapa 4 – Para finalizar, o grupo deve encontrar a expressão analítica do gráfico que elaborou. Se efetuarem arredondamentos, utilizem duas casas decimais.